EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.1.06

УДК 62.501.12 : 519.8

*И. РАНДВЕЭ*

# КООРДИНАЦИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Согласование взаимодействующих подсистем с критерием оптимальности объединенной системы, как известно [1-3], требует коррекции как модели, так и функций цели подсистем. В работе [3] поставлена задача о координируемости динамических систем, в частности линейных непрерывных систем. Ниже показана одна возможность декомпозиции линейного непрерывно-дискретного объекта в координируемые подсистемы, выведена количественная мера сравнения возможных структур подсистем.

Рассмотрим устойчивую, вполне управляемую систему, состоящую из $n$ одномерных звеньев

$$X_k = AX_{k-1} + U_k, \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ N, \tag{1}$$

где $U_k$ — $n$-мерный вектор управлений;
$X_k$ — $n$-мерный вектор выходных переменных;
$A$ — $n \times n$ матрица коэффициентов.

Задача управления состоит в выборе из неограниченного пространства управлений вектора $U_k (k = 1, 2, \dots, N)$, минимизирующего при заданном начальном состоянии объекта $X_0 = X^0$ квадратичный критерий оптимальности

$$I = \sum_{k=1}^{N} (X'_k C X_k + U'_k D U_k), \tag{2}$$

где $C$ и $D$ — диагональные, положительно определенные $n \times n$ матрицы.

Определим решение задачи (1)—(2) методом покомпонентного спуска, допускающим иерархическую оптимизацию [4]. Выделим согласно общей схеме декомпозиции в объекте (1) $m$ подсистем размерностью $n_i$ так, чтобы $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$

$$X_{i,k} = A_{ii} X_{i,k-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} A_{ij} X_{j,k-1} + U_{i,k}, \tag{3}$$

$$X_{i,0} = X_i^0, \qquad \begin{aligned} i &= 1,\ 2,\ \dots,\ m, \\ k &= 1,\ 2,\ \dots,\ N. \end{aligned}$$

Введем векторы

$$X_i = \begin{vmatrix} X_{i,1} \\ X_{i,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{i,N} \end{vmatrix}; \quad U_i = \begin{vmatrix} U_{i,1} \\ U_{i,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{i,N} \end{vmatrix}; \quad W_{ii} = \begin{vmatrix} A_{ii} \\ A_{ii}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{ii}^N \end{vmatrix} X_{i,0}; \quad W_{ij} = \begin{vmatrix} A_{ij} \\ A_{ii}A_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{ii}^{N-1} A_{ij} \end{vmatrix} X_{j,0}$$

и матрицы

$$K_i = \begin{bmatrix} I & & & 0 \\ A_{ii} I & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ A_{ii}^{N-1} & A_{ii}^{N-2} & \dots & A_{ii} I \end{bmatrix}; \quad L_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ A_{ij} 0 & 0 & & \\ & A_{ij} 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_{ij} 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение объекта (3) примет вид

$$X_i = K_i U_i + W_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (S_{ij} X_j + W_{ij}), \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{4}$$

где $S_{ij} = K_i L_{ij}$.

Критерий оптимальности (2), если учесть (4), примет вид

$$I = \sum_{i=1}^{m} (X'_i E_i X_i + U'_i H_i U_i), \tag{5}$$

где $E_i = I_N \otimes C_i$; $H_i = I_N \otimes D_i$; $I_N$ — $N \times N$ единичная матрица; символ $\otimes$ означает прямое произведение матриц.

Задачу (4)—(5) можно уже решить децентрализованно. Модель подсистем получим непосредственно из (4)

$$X_i = K_i U_i + W_{ii} + Z_i, \tag{6}$$

где $Z_i$ — $n_i N$-мерный вектор параметров координации модели. Критерий оптимальности $i$-й подсистемы содержит, кроме $i$-го слагаемого (5), параметры координации, учитывающие действие опущенных взаимосвязей в объекте (6). Вектор координации критерия удобно ввести непосредственно в необходимое условие оптимальности подсистем, которое запишется в виде

$$(K_i + B_i)' E_i X_i + H_i U_i + R_i = 0, \tag{7}$$

где $R_i$ — $n_i N$-мерный вектор координации критерия;
$B_i$ — $n_i N \times n_i N$ матрица коэффициентов.

Пусть в результате $s-1$ шагов итерации определились векторы $Z_i^{s-1}$ и $R_i^{s-1}$. Решением задачи (6)—(7) при фиксированных $Z_i^{s-1}$, $R_i^{s-1}$ определятся оптимальные управления подсистем на $s$-м шаге $U_i^s(Z_i^{s-1}, R_i^{s-1})$. Подставив $U_i^s$ в (6), получим выходные переменные на $s$-м шаге $X_i^s(Z_i^{s-1}, R_i^{s-1})$, которые нужны для получения $Z_i^s$ и $R_i^s$.

Из сравнения (4) и (6) имеем

$$Z_i^{s-1} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (S_{ij} X_j^{s-1} + W_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Вектор $R_i$ отражает действие управления $U_i$ на выходы остальных подсистем и воздействие всех $X_j$ на критерий оптимальности $i$-й подсистемы. В данном случае

$$R_i^{s-1} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} V'_{ij} E_j X_j^{s-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $V_{ij} = \dfrac{\partial X_j}{\partial U_i}$ есть $n_i N \times n_j N$ матрица коэффициентов. Условие $V_{ij} = 0$ означает полную несвязанность подсистем, как это видно из уравнения (4), разрешенного относительно управлений. Матрица $B_i$, если учесть (4) и (5), примет вид

$$B_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} S_{ij} V_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Декомпонированная система координируема. Если подставить в $R_i$ и $Z_i$ оптимальные выходные переменные задачи (4) — (5), то необходимые условия существования экстремума задачи (6) — (7) будут совпадать с соответствующими условиями задачи (4) — (5). Иными словами, существуют $R^*_i$ и $Z^*_i$, при которых решения задачи (6) — (7) являются компонентами решения исходной задачи управления.

Кроме самого факта координируемости декомпонированной системы, интересно оценить также скорость сходимости процесса координации. Используем для этой цели меру расстояния последовательности векторов состояния $X^s_i$ $(s = 1, 2, \ldots)$ в эвклидовом пространстве, предложенную в работе [5].

Пусть управления подсистем на $k$-м шаге $U_i$ найдены и пусть они остаются фиксированными в течение последующих $s$ шагов установления соответствующих выходных переменных. Для $m = 2$ имеем

$$X_i^s = K_i U_i + W_i + S_{ij} X_j^{s-1}, \tag{8}$$

где $W_i = W_{ii} + W_{ij}$. Выпишем аналогичное (8) уравнение для $X_j^{s-1}$ и подставим его в (8)

$$X_i^s = S_{ij} S_{ji} X_i^{s-2} + G_{1i}, \quad i, j = 1, 2;\ i \neq j, \tag{9}$$

где $G_{1i}$ — $n_i N$-мерный вектор свободных членов. Выпишем далее выражение для $X_i^{s-2} (X_i^{s-4})$ и вычтем его из (9) (члены, не содержащие координаты состояния, сокращаются)

$$X_i^s - X_i^{s-2} = S_{ij} S_{ji} (X_i^{s-2} - X_i^{s-4}), \quad i, j = 1, 2;\ i \neq j. \tag{10}$$

Из (10) видно, что сходимость процесса координации модели существенно зависит от свойств матрицы $S_{ij} S_{ji}$. Мерой сравнения возможных структур декомпонированного объекта может служить скалярная величина — норма матрицы $S_{ij} S_{ji}$.

Меру скорости сходимости совместного процесса координации модели и критерия можно найти аналогичным путем. Пусть $m = 2$, тогда

$$\begin{aligned} R_i^{s-1} &= V'_{ij} E_j X_j^{s-1}, \\ Z_i^{s-1} &= S_{ij} X_j^{s-1} + W_{ij}, \\ B_i &= S_{ij} V_{ij}, \\ V_{ij} &= (I - S_{ji} S_{ij})^{-1} S_{ji} K_i, \quad i, j = 1, 2;\ i \neq j. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение задачи (6) — (7) при заданных $R_i^{s-1}$ и $Z_i^{s-1}$ дает

$$U_i^s = -M_i^{-1} \left[ (K_i + B_i)' E_i (W_{ii} + Z_i^{s-1}) + R_i^{s-1} \right],$$

где $M_i = (K_i + B_i)' E_i K_i + H_i$, $i = 1, 2$.

Подставим найденное управление в уравнение подсистемы (6) и, учитывая (11), получим зависимость $X_i^s(X_j^{s-1})$ в виде

$$X_i^s = P_i X_j^{s-1} + G_i, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} P_i &= T_i S_{ij} - K_i M_i^{-1} V'_{ij} E_j, \\ G_i &= T_i (W_{ii} + W_{ij}), \\ T_i &= I - K_i M_i^{-1} (K_i + S_{ij} V_{ij})' E_i, \quad i, j = 1, 2; \ i \neq j. \end{aligned}$$

Для $X_j^{s-1}$ имеем

$$X_j^{s-1}(X_i^{s-2}) = P_j X_i^{s-2} + G_j.$$

Подставив $X_j^{s-1}$ в (12), получим

$$X_i^s(X_i^{s-2}) = P_i P_j X_i^{s-2} + P_i G_j + G_i. \tag{13}$$

Выпишем, учитывая (13), выражение для $X_i^{s-2}(X_i^{s-4})$ и вычтем его из $X_i^s(X_i^{s-2})$ (члены, не содержащие координаты состояния, сокращаются)

$$X_i^s - X_i^{s-2} = P_i P_j (X_i^{s-2} - X_i^{s-4}), \quad i, j = 1, 2; \ i \neq j. \tag{14}$$

Мерой скорости сходимости последовательности $X_i^s$ и мерой эффективности группирования звеньев объекта в подсистемы может служить, как и в случае координации модели, норма матрицы $P_i P_j$, в данном случае — $p = \|P_1 P_2\|$.

В случае $m > 2$ выражение (13) включает слагаемые добавленных взаимосвязей

$$X_i^s = Q_{i,1} X_1^{s-2} + \ldots + Q_{i,m} X_m^{s-2} + G_{2i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

или сокращенно

$$X^s = Q X^{s-2} + G.$$

Тогда выражение (14) примет вид

$$X^s - X^{s-2} = Q (X^{s-2} - X^{s-4}).$$

В качестве примера решим задачу (1)—(2) по описанной выше схеме при следующих упрощениях:

$$\begin{aligned} &C = D = I; \\ &N = 6; \\ &n = 4, \ n_i = 2; \\ &X'_{i,0} = (30, 30), \ i = 1, 2. \end{aligned} \qquad A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Величина скаляра $p$ для трех возможных структур декомпонированной системы примет следующие значения: $p(1{,}2 - 3{,}4) = 0{,}18$; $p(1{,}3 - 2{,}4) = 0{,}12$; $p(1{,}4 - 2{,}3) = 0{,}15$. Как видно, наибольшую скорость сходимости процесса координации дает объединение в одну подсистему первого и третьего звена объекта, а во вторую подсистему — второго и четвертого звена.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Mesarovic M. D., Macko D., Takahara Y., Automatica, 6, 261 (1970).
2. Kulikowski R., Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 18, n° 1 (1970).
3. Takahara Y., Mesarovic M. D., IEEE Trans. Autom. Control, **AC-14**, Nr. 6 (1969).
4. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 146 (1969).
5. Sprague C. F., IEEE Trans. Autom. Control, **AC-9**, Nr. 4 (1964).


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
8/VII 1971

*I. RANDVEE*

### AJAS DISKREETSETE SÜSTEEMIDE KOORDINEERIMINE

On näidatud võimalust lineaarse pidev-diskreetse juhtimissüsteemi jaotamiseks koordineeruvateks alamsüsteemideks ja esitatud kvantitatiivne näitaja nende alamsüsteemide võimalike struktuuride võrdlemiseks.

*I. RANDVEE*

### COORDINATION OF TIME-DISCRETE INTERACTING SYSTEMS

The problem of partitioning a multivariable control problem to coordinable subproblems is investigated, and a quantitative measure for comparing possible structures of decomposed linear time-discrete systems is derived.