EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.1.05

УДК 62.50 : 519.2

Л. МЫТУС

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

В задачах дуального управления [1] обычно предполагалось, что информация поступает в дискретные моменты времени, а управляющее воздействие является непрерывной функцией своих аргументов. В данной работе рассматриваются линейные неприводимые объекты при непрерывно поступающей информации и с дискретным множеством допустимых значений управляющих воздействий. Целевые функции предполагаются зависящими от одной компоненты вектора состояния или от линейной комбинации его компонент [2, 3].

Проблема дуального управления такими системами заменяется эквивалентной проблемой решения дифференциального уравнения в частных производных с разрывными коэффициентами. Коэффициенты имеют разрывы только первого рода, расположенные на линиях переключения управляющего воздействия. Линии разрыва коэффициентов неизвестны, и всякое их фиксирование определяет стратегию управления. Найдены дополнительные условия на линиях разрыва коэффициентов, определяющие как решение уравнения, так и оптимальную стратегию в смысле минимума общего риска. В случае приводимых систем показывается эквивалентность наших результатов с результатами работы [3].

Проблемы, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений со свободными границами, рассматривались в связи с задачами последовательного анализа [4–7] и в связи с задачей удержания процесса в заданных пределах [8]. Применение дифференциальных уравнений со свободными границами в случае управления приводимыми системами рассматривалось в [3].

1. Рассмотрим двумерный объект, данный уравнениями

$$\begin{cases} dx(t) = [a_1x(t) + u\theta(t)]dt + b_1dw_1(t), \\ d\theta(t) = a_2\theta(t)\,dt + b_2dw_2(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

и доступный наблюдению процесс

$$dy(t) = hx(t)\,dt + cdw_3(t), \tag{1.2}$$

где $0 \leqslant t \leqslant T$; a_1, b_1, a_2, b_2, h, c, T — известные константы. Для $x(0) = x_0$ и $\theta(0) = \theta_0$ заданы функции плотности вероятностей (ф. п. в.)

$$\mathfrak{L}(x_0) = \mathrm{Nor}(\varkappa_1^0,\ \varkappa_{11}^0) \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}(\theta_0) = \mathrm{Nor}(\varkappa_2^0,\ \varkappa_{22}^0);$$

$w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$ — независимые винеровские процессы. Множество допустимых управляющих воздействий задано в виде $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$. Пусть $l(x, u, t)$ — функция потерь и $L(x, u, T) = \int\limits_0^T l(x, u, s)\,ds$ — целевая функция.

В каждый момент времени t требуется найти управляющее воздействие $u(\varkappa_1, \varkappa_{11}, t) \in U$, которое минимизирует общий остаточный риск

$$V(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u, t) = E_y\{\int_t^T r(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u, s)\,ds\}, \tag{1.3}$$

где

$$r(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u, s) = E_x\{l(x, u, s) \mid s \geqslant t\}. \tag{1.4}$$

Апостериорная ф. п. в. для $x(t)$ в данном случае является нормальной [9] и содержит параметры $\varkappa_1$ и $\varkappa_{11}$. Обозначения $E_y\{\ldots\}$ и $E_x\{\ldots\}$ есть условные математические ожидания по y и x соответственно при фиксированных реализациях $y(s)$ и $x(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$.

2. Так как (1.3) и (1.4) зависят только от параметров апостериорной ф. п. в. для $x(t)$, то, минуя нахождение ф. п. в. для $\theta(t)$, найдем уравнения параметров $\varkappa_1$ и $\varkappa_{11}$.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = (x, \theta)^T; \quad \mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t))^T; \quad \mathbf{g} = (h, 0)^T;$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & u \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\begin{cases} d\mathbf{z}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)\,dt + \mathbf{B}\,d\mathbf{w}(t), \\ dy(t) = \mathbf{g}^T\mathbf{z}(t)\,dt + c\,dw_3(t). \end{cases}$$

Для $\mathbf{z}(0) \equiv \mathbf{z}_0$ имеем ф. п. в. $\mathfrak{L}(\mathbf{z}_0) = \mathrm{Nor}\,(\vec{\varkappa}^0, K^0)$, где $\vec{\varkappa}(0) \equiv \vec{\varkappa}^0 = (\varkappa_1^0, \varkappa_2^0)^T$ и

$$\mathrm{K}(0) \equiv \mathrm{K}^0 = \begin{pmatrix} \varkappa_{11}^0 & 0 \\ 0 & \varkappa_{22}^0 \end{pmatrix}.$$

Известно [9], что апостериорная ф. п. в. для $\mathbf{z}(t)$ является нормальной и параметры ее удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} d\vec{\varkappa} = \mathbf{A}\vec{\varkappa}\,dt + c^{-2}\mathrm{K}\mathbf{g}\,(dy(t) - \mathbf{g}^T\vec{\varkappa}\,dt), \\ \dfrac{d\mathrm{K}}{dt} = \mathbf{A}\mathrm{K} + \mathrm{K}\mathbf{A}^T - c^{-2}\mathrm{K}\mathbf{g}\mathbf{g}^T\mathrm{K}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T. \end{cases} \tag{2.1}$$

Известно также [10], что маргинальная ф. п. в. для $x(t)$ также нормальна и ее параметры — среднее значение $\varkappa_1$ и дисперсия $\varkappa_{11}$ — подчиняются уравнениям

$$\begin{cases} d\varkappa_1 = (a_1\varkappa_1 + u\varkappa_2)\,dt + \varkappa_{11}hc^{-2}(dy(t) - h\varkappa_1\,dt), \\ \dfrac{d\varkappa_{11}}{dt} = 2(a_1\varkappa_{11} + u\varkappa_{12}) + b_1^2 - \varkappa_{11}^2h^2c^{-2}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Поскольку (2.2) зависит также от параметров ф. п. в. случайного процесса $\theta(t)$, необходимо решить систему (2.1).

3. Нас интересует минимальное значение функционала $V(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u, t)$ и стратегия $u(\varkappa_1, \varkappa_{11}, t)$, обеспечивающая это значение в области

$\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_{11}, t) = \{(\varkappa_1, t) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ m \leqslant \varkappa_1 \leqslant M\}$. Величины m и M введены из физических соображений, поскольку в технических устройствах $\varkappa_1$ может изменяться только в разумных пределах. Выход $\varkappa_1$ из этого интервала может означать, например, аварию, и поэтому прямые $\varkappa_1 = m$ и $\varkappa_1 = M$ считаются поглощающими экранами.

Далее предположим, что область $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_{11}, t)$ можно разделить на подобласти Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, в каждой из которых стратегия предписывает использование управляющего воздействия u_i. Подобласти Γ_i и Γ_j разделены линией переключения $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$, на которой меняется значение управляющего воздействия.

Выведем теперь уравнение для $V(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u_i, t)$ в подобласти Γ_i. Легко проверить (см. [11], гл. VIII), что если функция потерь $l(x, u_i, t)$ и ее производные по x до второго порядка включительно являются непрерывными и ограниченными функциями и сама $l(x, u_i, t)$ дифференцируема по t, то $V(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u_i, t)$ в подобласти Γ_i удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u_i, t)}{\partial t} + LV(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u_i, t) + r(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u_i, t) = 0. \tag{3.1}$$

Оператор $L = \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial \varkappa_1} + \dfrac{1}{2}\beta_i \dfrac{\partial^2}{\partial \varkappa_1^2}$ является производящим дифференциальным оператором процесса $\varkappa_1$, где

$$\alpha_i = a_1\varkappa_1 + u_i\varkappa_2, \qquad \beta_i = \varkappa_{11}hc^{-2},$$

а $\varkappa_{11}$ зависит от u_i.

В целях дальнейшего изложения упростим обозначения, вводя $\varkappa_1 = \varkappa$ и среди аргументов $V(\varkappa_1, \varkappa_{11}, u, t)$ опуская u тогда, когда будем подразумевать любую фиксированную стратегию.

4. Подобласти Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, определяются при помощи линий переключения $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$ управляющего воздействия. Из свойств функционала $V(\varkappa, \varkappa_{11}, u, t)$ находим условия, определяющие решение уравнения (3.1) в области $\Gamma(\varkappa, \varkappa_{11}, t)$ при фиксированных линиях $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$, а из условия минимума общего риска находим дополнительное условие, которое выполнено только на линиях $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$, соответствующих оптимальной стратегии.

Из (1.3) следует, что

$$V(\varkappa, T) = 0. \tag{4.1}$$

Из свойств определенного интеграла и непрерывности параметров апостериорной ф. п. в вытекает непрерывность функционала $V(\varkappa, \varkappa_{11}, t)$ на любой линии переключения, т. е.

$$V(\varkappa_b, \varkappa_{11}, t_b) = V^i = V^j, \tag{4.2}$$

где $(\varkappa_b, \varkappa_{11}, t_b) \in b_{ij}(t, \varkappa_{11})$ и $\displaystyle\lim_{\substack{(\varkappa,t)\to(\varkappa_b,t_b)\\ (\varkappa,\varkappa_{11},t)\in\Gamma_k}} V(\varkappa, \varkappa_{11}, t) = V^k, \quad k = i, j.$

Аналогично обозначаем односторонние производные. При некоторых предположениях в приложении показано, что на любой линии переключения $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$ выполнено условие «гладкого склеивания»

$$\frac{\partial V^i}{\partial \varkappa} = \frac{\partial V^j}{\partial \varkappa}. \tag{4.3}$$

На прямых $\varkappa = m$ и $\varkappa = M$ можно задать граничные условия

$$V(m,t)=\int_t^T r(m,\varkappa_{11},u_i,s)\,ds \quad \text{и} \quad V(M,t)=\int_t^T r(M,\varkappa_{11},u_i,s)\,ds, \tag{4.4}$$

где i принимает значения $1, 2, \ldots, r$ в зависимости от того, из какой подобласти Γ_i процесс вышел на границу. Условия (4.1)—(4.4) достаточны для определения решения уравнения (3.1) при заданных линиях переключения [12].

Недостающее условие для определения оптимальных линий переключения можно вывести из следующего принципа:

если модифицировать оптимальную стратегию при помощи локального сдвига линии переключения $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ в подобласть Γ_i (либо в Γ_j), то риск, соответствующий новой стратегии, не меньше риска при оптимальной стратегии.

В приложении доказывается, что на оптимальной линии переключения

$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial \varkappa^2}=\frac{\partial^2 V^j}{\partial \varkappa^2}. \tag{4.5}$$

Итак, вместо решения задачи дуального управления (1.1)—(1.3) следует решить уравнение (3.1) при условиях (4.1)—(4.5).

5. В. Колемаев в работе [8], отличающейся другими постановками аналогичной задачи, дал без доказательства те же граничные условия. В частном случае двух возможных значений управляющего воздействия наши граничные условия совпадают с условиями Г. Чернова [7] для задачи «о двуруком бандите».

Наконец, покажем совместимость наших результатов с результатами Н. Куланова [3]. Перепишем нашу задачу управления в виде уравнения Беллмана для случая рассмотренной в [3] приводимой системы. Имеем

$$-\frac{\partial V(\varkappa,t)}{\partial t}=\min_{u\in U}\left\{u\alpha(\varkappa,t)\,\frac{\partial V(\varkappa,t)}{\partial \varkappa}+\frac{1}{2}\,\beta^2(t)\,\frac{\partial^2 V(\varkappa,t)}{\partial \varkappa^2}+r(u,\varkappa,t)\right\},$$

где $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$, а $\beta(t)$ не зависит от управляющего воздействия. Как доказано в приложении, производная по t является непрерывной на линии переключения $b_{ij}(t)$. Учитывая еще (4.3) и (4.5), получим, что на линии $b_{ij}(t)$ выполнено равенство

$$r(u_i,\varkappa,t)-r(u_j,\varkappa,t)=-\alpha(\varkappa,t)\,\frac{\partial V(\varkappa,t)}{\partial \varkappa}\,(u_i-u_j).$$

Устремляя $\Delta u=u_i-u_j$ к нулю и предполагая $r(u,\varkappa,t)$ кусочно-дифференцируемой по u, получим

$$\frac{\partial r(u,\varkappa,t)}{\partial u}=-\alpha(\varkappa,t)\,\frac{\partial V(\varkappa,t)}{\partial \varkappa}.$$

Наконец, если предполагать $r(u,\varkappa,t)$ кусочно-линейной функцией от u, (в [3] принято $r(u,\varkappa,t)=|u|C(t)\lambda)$, то получим условия работы [3], выполненные на оптимальных линиях переключения.

Приложение

1. Для доказательства непрерывности первых производных по $\varkappa$ на линиях переключения $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ предположим, что функция $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ непрерывно дифференцируема по t. Тогда имеем

$$b_{ij}(t+\delta t, \varkappa_{11}) = b_{ij}(t, \varkappa_{11}) + b\delta t + o(\delta t), \quad |b| < \infty. \tag{0.1}$$

Пусть для конкретности Γ_i находится ниже кривой $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$. Допустим, что в течение времени δt начиная с точек $(\varkappa, \varkappa_{11}, t) \in b_{ij}(t, \varkappa_{11})$ используем смешанную стратегию u_δ, т. е. применяем в течение δt управляющее воздействие u_i с вероятностью $P(\delta\varkappa^i < 0)$ и u_j с вероятностью $P(\delta\varkappa^i \geqslant 0)$. Соответствующий риск обозначим через $V_\delta(\varkappa, \varkappa_{11}, t)$. Предположим, что

$$|V_\delta(\varkappa, \varkappa_{11}, t) - V(\varkappa, \varkappa_{11}, t)| = O(\delta t). \tag{0.2}$$

В дальнейшем k может равняться i или j. Приращение

$$\delta\varkappa^k = \varkappa(t+\delta t, u_k) - \varkappa(t)$$

является случайной величиной с нормальной ф. п. в., при этом

$$E\{\delta\varkappa^k\} = \alpha_k\delta t + o(\delta t) \quad \text{и} \quad E\{(\delta\varkappa^k)^2\} = \beta_k^2\delta t + o(\delta t).$$

Известно, что

$$E\{\int_t^{t+\delta t} r(\varkappa, \varkappa_{11}, u_k, s)\, ds\} = r(\varkappa, \varkappa_{11}, u_k, t)\,\delta t + o(\delta t) \tag{0.3}$$

и

$$E\{\delta\varkappa^k \mid 0 \leqslant \delta\varkappa^k \leqslant |b|\,\delta t\} = o(\delta t). \tag{0.4}$$

С учетом (0.2)—(0.4) получим (1.3) в виде

$$V(\varkappa, \varkappa_{11}, t) = E\{V(\varkappa+\delta\varkappa, \varkappa_{11}+\delta\varkappa_{11}, t+\delta t)\} + O(\delta t). \tag{0.5}$$

Разлагая $E\{V(\varkappa+\delta\varkappa, \varkappa_{11}+\delta\varkappa_{11}, t+\delta t)\}$ в ряд Тейлора около точки $(\varkappa, \varkappa_{11}, t)$, получим

$$\begin{aligned} E\{V(\varkappa+\delta\varkappa, \varkappa_{11}+\delta\varkappa_{11}, t+\delta t)\} &= V(\varkappa, \varkappa_{11}, t) + \\ &+ \frac{\partial V^i}{\partial\varkappa}[E\{\delta\varkappa^i \mid \delta\varkappa^i < 0\}P(\delta\varkappa^i < 0) + \\ + E\{\delta\varkappa^j \mid \delta\varkappa^j < 0\}P(\delta\varkappa^i \geqslant 0)] &+ \frac{\partial V^j}{\partial\varkappa}[E\{\delta\varkappa^i \mid \delta\varkappa^i \geqslant 0\}P(\delta\varkappa^i < 0) + \\ &+ E\{\delta\varkappa^j \mid \delta\varkappa^j \geqslant 0\}P(\delta\varkappa^i \geqslant 0)] + O(\delta t). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Легко показать, что

$$E\{\delta\varkappa^k \mid \delta\varkappa^k \geqslant 0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-\gamma_k^2\delta t]\beta_k\sqrt{\delta t} + O(\delta t) \tag{0.7}$$

и

$$E\{\delta\varkappa^k \mid \delta\varkappa^k < 0\} = -E\{\delta\varkappa^k \mid \delta\varkappa^k \geqslant 0\} + O(\delta t), \tag{0.8}$$

где $\gamma_k = \alpha_k/\sqrt{2}\beta_k$.

Учитывая (0.6)—(0.8), а также тождество $P(\delta\varkappa^i < 0) + P(\delta\varkappa^i \geqslant 0) \equiv 1$ и устремляя δt к нулю, получим из (0.5)

$$\left(\frac{\partial V^j}{\partial\varkappa} - \frac{\partial V^i}{\partial\varkappa}\right)c_1 = 0, \quad c_1 = \text{const} \neq 0,$$

откуда вытекает равенство (4.3).

2. Учитывая (0.1) и дифференцируя тождество (4.2) на линии $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$ по t, получим

$$\frac{\partial V^i}{\partial \varkappa}\frac{db_{ij}(t,\varkappa_{11})}{dt}+\frac{\partial V^i}{\partial t}=\frac{\partial V^j}{\partial \varkappa}\frac{db_{ij}(t,\varkappa_{11})}{dt}+\frac{dV^j}{\partial t},$$

откуда в силу (4.3) следует, что на $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$

$$\frac{\partial V^i}{\partial t}=\frac{\partial V^j}{\partial t}. \tag{0.9}$$

3. Для доказательства равенства вторых производных по $\varkappa$ на $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ сдвинем сперва оптимальную линию переключения $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ в подобласть Γ_j. Используя то обстоятельство, что всякое изменение оптимальной стратегии может лишь увеличить потери, получим

$$V(\varkappa,\varkappa_{11},t)\leqslant r(\varkappa,\varkappa_{11},u_i,t)\,\delta t+E\{V(\varkappa+\delta\varkappa^i,\varkappa_{11}+\delta\varkappa_{11},t+\delta t)\}+o(\delta t). \tag{0.10}$$

Разложим $E\{V(\varkappa+\delta\varkappa^i,\varkappa_{11}+\delta\varkappa_{11},t+\delta t)\}$ в ряд Тейлора около точки $(\varkappa,\varkappa_{11},t)$ и, учитывая (0.9) и (4.3), получим

$$E\{V(\varkappa+\delta\varkappa^i,\varkappa_{11}+\delta\varkappa_{11},t+\delta t)\}=V(\varkappa,\varkappa_{11},t)+\frac{\partial V}{\partial t}\delta t+\frac{\partial V}{\partial \varkappa}\alpha_i\delta t+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^i}{\partial\varkappa^2}E\{(\delta\varkappa^i)^2\,|\,\delta\varkappa^i<0\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^j}{\partial\varkappa^2}E\{(\delta\varkappa^i)^2\,|\,\delta\varkappa^i\geqslant 0\}+o(\delta t). \tag{0.11}$$

Известно, что

$$E\{(\delta\varkappa^k)^2\,|\,\delta\varkappa^k\geqslant 0\}=\beta_k^2\Phi(\gamma_k\sqrt{\delta t})\,\delta t+o(\delta t) \tag{0.12}$$

и

$$E\{(\delta\varkappa^k)^2\,|\,\delta\varkappa^k<0\}=\beta_k^2\Phi(-\gamma_k\sqrt{\delta t})\,\delta t+o(\delta t), \tag{0.13}$$

где

$$\Phi(\gamma_k\sqrt{\delta t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\gamma_k\sqrt{\delta t}}\exp[-s^2/2]\,ds.$$

В связи со сдвигом $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ в Γ_j в точке $(\varkappa,\varkappa_{11},t)\in b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ выполняется уравнение (3.1), поэтому имеем

$$r(\varkappa,\varkappa_{11},u_i,t)=-\frac{\partial V}{\partial t}-\alpha_i\frac{\partial V}{\partial\varkappa}-\frac{1}{2}\beta_i^2\frac{\partial^2 V^i}{\partial\varkappa^2}. \tag{0.14}$$

Подставляем (0.11)—(0.14) в (0.10), откуда после несложных преобразований следует, что в точке $(\varkappa_1,\varkappa_{11},t)\in b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 V^j}{\partial\varkappa^2}\geqslant\frac{\partial^2 V^i}{\partial\varkappa^2}. \tag{0.15}$$

Сдвинув теперь $b_{ij}(t,\varkappa_{11})$ в подобласть Γ_i, имеем

$$V(\varkappa,\ \varkappa_{11}-\delta\varkappa_{11},\ t-\delta t)\leqslant$$
$$\leqslant r(\varkappa,\ \varkappa_{11}-\delta\varkappa_{11},\ u_j,\ t-\delta t)\,\delta t+E\{V(\varkappa+\delta\varkappa^j,\ \varkappa_{11},\ t)\}+o(\delta t).$$

Действуя далее аналогично предыдущему, получим обратное неравенство

$$\frac{\partial^2 V^j}{\partial \varkappa^2} \leqslant \frac{\partial^2 V^i}{\partial \varkappa^2}. \qquad (0.16)$$

Сравнение (0.15) и (0.16) приводит к доказательству равенства (4.5) на оптимальной линии переключения $b_{ij}(t, \varkappa_{11})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, М., 1966.
2. Куланов Н. В., Автоматика и телемех., № 11, 44 (1970).
3. Куланов Н. В., В сб.: Докл. II Всес. сов. по статист. методам теории управления, Секция управления, М., 1970, с. 22.
4. Григелионис Б. И., Ширяев А. Н., Теория вероятн. и ее прим., **XI**, 612 (1966).
5. Bather J., Chernoff H., Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., **III**, University of California Press, 1967, p. 181.
6. Bather J., Chernoff H., J. Appl. Prob., **4**, 584 (1967).
7. Chernoff H., Sankhya, **A30**, 221 (1968).
8. Колемаев В. А., Изв. АН СССР, Сер. техн. киберн., № 4, 94 (1963).
9. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Тр. матем. ин-та им. Стеклова, **CIV**, 135 (1968).
10. Уилкс С., Математическая статистика, М., 1967.
11. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965.
12. Камынин Л. И., Сибирский матем. ж., **4**, 1071 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/VII 1971

L. MÕTUS

PIDEVATE SÜSTEEMIDE DUAALSEST JUHTIMISEST

Stohhastiliste diferentsiaalvõrranditega määratud lineaarse mittetaanduva süsteemi duaalse juhtimise probleem on asendatud katkevate kordajatega osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamise probleemiga. Osatuletistega diferentsiaalvõrrand kehtib lõplikus piirkonnas, kusjuures antud on alg- ja rajatingimused. Kordajate esimest liiki katkevuspunktid asuvad juhttoime lülitusjoontel. Leiti lisatingimus, mis lisaks vajalikele tingimustele peab suvaliste fikseeritud lülitusjoonte korral olema täidetud võimaldamaks leida nii lahendit kui ka optimaalseid lülitusjooni.

L. MÕTUS

ON SOLVING A CONTINUOUS-TIME DUAL CONTROL PROBLEM

The dual control problem of linear continuous-time systems with a discrete set of controls is reduced to that of solving a partial differential equation in finite domain with suitable boundary conditions. Coefficients of the differential equation are discontinuous functions with discontinuities on control switching lines. An optional fixing of switching lines determines the strategy. A special condition on switching line is derived to fix the optimal strategy in addition to those conditions that enable the solution of the equation with optionally fixed switching lines.