EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.1.01

УДК 530.12 : 531.51

ПИРЕТ КЕРЕС, В. УНТ

ГРАВИТАЦИОННОЕ КВАДРУПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Разработана схема интегрирования уравнений Эйнштейна методом последовательных приближений и разделения переменных. Эта схема применена в случае гравитационного квадрупольного излучения. Детально рассмотрено второе приближение.

1. Введение

При интегрировании точных уравнений Эйнштейна встречаются настолько большие трудности, что в подавляющем большинстве случаев, представляющих физический интерес, точных решений найти не удается. Поэтому разработано немало приближенных схем интегрирования уравнений Эйнштейна. Но в более сложных случаях даже приближенные методы часто не дают удовлетворительных решений и ведут к расходящимся результатам. По-видимому, при этом важную роль играет выбор координатной системы.

В данной работе приведен метод интегрирования приближенных уравнений Эйнштейна путем разделения переменных. Хорошо известно, что метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений математической физики. При этом в решениях появляются специальные функции, являющиеся собственными функциями дифференциальных операторов, инвариантных относительно определенных движений. Например, обычные шаровые функции $Y_l^{(m)}$ и шаровые функции со спином Y^l_{sm} являются матричными элементами неприводимых представлений трехмерных вращений. Но так как пространство-время общего типа групп движений не имеет, то и дифференциальные операторы общей теории относительности свойствами инвариантности не обладают и хорошо известные специальные функции математической физики в решения точных уравнений Эйнштейна не входят. Если же интегрировать уравнения Эйнштейна в обобщенных координатах Бонди методом так называемых быстрых приближений, то задачу удается поставить так, что в каждом приближении линейная часть уравнений поля оказывается инвариантной относительно группы трехмерных вращений и решение уравнений можно искать в виде рядов по шаровым функциям Y^l_{sm} со спином $s=0,1,2$. При этом все операции дифференцирования по полярным углам можно собрать в оператор $\eth_s$ («зоп»), который меняет только значение спина s при Y^l_{sm} и не меняет значения индексов l и m. Именно благодаря этому обстоятельству удалось разделить переменные в общем случае одновременно во всех десяти уравнениях Эйнштейна.

Остальные математические допущения, которые сделаны в данной работе, следующие. Предполагается, что метрику пространства-времени можно искать в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \underset{1}{g_{\mu\nu}} + \underset{2}{g_{\mu\nu}} + \dots, \tag{1}$$

где $\eta_{\mu\nu} \equiv \underset{0}{g_{\mu\nu}} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор плоского пространства-времени. Порядок величины нелинейных членов и производных оценивается следующим образом: $O(\underset{k}{g_{\mu\nu}} \cdot \underset{r}{g_{\alpha\beta}}) = O(\underset{k+r}{g_{\mu\nu}})$, $O(\underset{k}{g_{\mu\nu,\sigma}}) = O(\underset{k}{g_{\mu\nu}})$. В каждом приближении надо интегрировать линейные уравнения $\underset{1}{R_{\mu\nu}} = 0$, $\underset{2}{R_{\mu\nu}} = 0, \dots$, решения которых ищутся в виде рядов по отрицательным степеням радиальной координаты

$$\underset{n}{g_{\mu\nu}} = \sum_{s=1}^{\infty} \underset{n}{\overset{(s)}{g_{\mu\nu}}}(u, \vartheta, \varphi)\, r^{-s}. \tag{2}$$

Гипотезу (2) доказать невозможно. Поэтому важное значение имеет непосредственное применение метода в конкретных случаях. Ниже мы рассмотрим гравитационное квадрупольное излучение в первом и втором приближениях.

Во втором пункте работы приведены уравнения поля, в третьем — уравнения для коэффициентов разложения. В четвертом и пятом пунктах рассмотрено квадрупольное излучение, а в шестом — «хвосты» этого излучения. В седьмом пункте мы коснемся законов сохранения Ньюмэна—Пенроуза. В приложении приведены определения шаровых функций со спином Y^l_{sm} и операторов $\eth_s$, $\bar{\eth}_s$.

2. Уравнения поля

Самый общий линейный элемент пространства-времени может быть преобразован к виду [1]

$$\begin{aligned} ds^2 = \Big[\Big(1 + \frac{V}{r} \Big) e^{2\beta} - r^2 e^{2\gamma} U^2 \cosh 2\delta - r^2 e^{-2\gamma} W^2 \cosh 2\delta - \\ - 2r^2 UW \sinh 2\delta \Big] du^2 + 2e^{2\beta}\, du\, dr + 2r^2 (e^{2\gamma} U \cosh 2\delta + \\ + W \sinh 2\delta)\, du\, d\vartheta + 2r^2 (e^{-2\gamma} W \cosh 2\delta + \\ + U \sinh 2\delta) \sin\vartheta\, du\, d\varphi - r^2 (e^{2\gamma} \cosh 2\delta\, d\vartheta^2 + \\ + 2 \sinh 2\delta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + e^{-2\gamma} \cosh 2\delta \sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \end{aligned} \tag{3}$$

В плоском пространстве-времени $V = \beta = \gamma = \delta = U = W = 0$.

При таком виде линейного элемента из десяти уравнений Эйнштейна в пустом пространстве-времени *

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

можно выделить шесть главных уравнений [1] (четыре уравнения гиперповерхности и два стандартных уравнения). Если все эти уравнения удовлетворены, то из тождеств Бианки получим еще три дополнительных условия и одно тривиальное уравнение $\left(f_{,1} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial r} \right)$

* Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; латинские — 1, 2, 3.

$$(r^2R_{00})_{,1} = (r^2R_{02})_{,1} = (r^2R_{03})_{,1} = 0, \tag{5}$$

$$R_{01} = 0. \tag{6}$$

Если ввести комплексные функции

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv \gamma - i\delta, \\ G &\equiv -W - iU, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то главные уравнения можно написать в следующем комплексном виде [2]:

$$-4\beta_{,1}r^{-1} + \langle 11\rangle = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2r^2}(r^4G_{,1})_{,1} = -i\eth_0\left(\beta_{,1} - \frac{2}{r}\beta\right) + i\tilde{\eth}_2F_{,1} - \langle i12 + 13\rangle, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 2V_{,1} = \frac{i}{2r^2}\tilde{\eth}_1(r^4G)_{,1} - \frac{i}{2r^2}\overline{\tilde{\eth}_1(r^4G)_{,1}} + 4\beta - 2\Delta^*\beta + \\ + \tilde{\eth}_1\tilde{\eth}_2F + \overline{\tilde{\eth}_1\tilde{\eth}_2F} - \langle 22 + 33\rangle, \end{aligned} \tag{10}$$

$$4r(r\dot{F})_{,1} = 2r(rF)_{,11} - i\eth_1(r^2G)_{,1} + 2\eth_1\eth_0\beta + \langle 22 - 33 - 2i23\rangle. \tag{11}$$

Здесь $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial u}$, Δ^* — оператор Лапласа на сфере и $\eth_s$, $\tilde{\eth}_s$ — операторы дифференцирования по полярным углам, определение которых приведено в приложении. Черта над символом функции означает комплексное сопряжение. Символ $\langle\mu\nu\rangle$ обозначает нелинейную часть $\sin^{-m}\vartheta\cdot R_{\mu\nu}$, где $m = 2$, если $\mu = \nu = 3$; $m = 1$, если только один из индексов равен 3 и $m = 0$ во всех остальных случаях; $\langle\mu\nu + A\varrho\sigma\rangle \equiv \langle\mu\nu\rangle + A\langle\varrho\sigma\rangle$. Точные выражения для $\langle\mu\nu\rangle$ можно найти в работе [1]. Здесь приведем выражения для комплексных комбинаций $\langle\mu\nu\rangle$ во втором приближении:

$$\begin{aligned} \langle 11\rangle &= 2F_{,1}\overline{F}_{,1}, \\ \langle i12 + 13\rangle &= -\frac{1}{r^2}(r^4F\overline{G}_{,1})_{,1} + 2iF_{,1}\overline{\tilde{\eth}_2F} + i\overline{F}\eth_2F_{,1} - iF\overline{\tilde{\eth}_2F_{,1}}, \\ \langle 22 + 33\rangle &= \frac{1}{2}r^4G_{,1}\overline{G}_{,1} + 4F\overline{F} + \eth_2F\overline{\eth_2F} + \\ &\quad + 3\tilde{\eth}_2F\overline{\tilde{\eth}_2F} + 2(\overline{F}\eth_1\tilde{\eth}_2F + F\overline{\eth_1\tilde{\eth}_2F}), \\ \langle 22 - 33 - 2i23\rangle &= 2(rF_{,1}V)_{,1} - \frac{1}{2}r^4(G_{,1})^2 + \\ &\quad + i(r^2\overline{G}\eth_2 - r^2G\tilde{\eth}_2)_{,1}F + 2ir^2(\overline{G}\eth_2 - G\tilde{\eth}_2)F_{,1} + \\ &\quad + iF(r^2\tilde{\eth}_1G + r^2\overline{\tilde{\eth}_1G})_{,1} + ir^2F_{,1}(\tilde{\eth}_1G + 3\overline{\tilde{\eth}_1G}). \end{aligned} \tag{12}$$

Все функции на правой стороне равенств взяты в линейном приближении, а индексы, указывающие порядок величины членов, опущены.

В асимптотически плоском пространстве-времени интегралы уравнений (8)—(11) содержат функции интегрирования M, N, P и c:

$$
\begin{aligned}
V &= -2M(u,\vartheta,\varphi) + \dots, \\
G &= -\frac{2}{r^3}[P(u,\vartheta,\varphi) + iN(u,\vartheta,\varphi)] + \dots, \qquad (13) \\
F &= \frac{1}{r}c(u,\vartheta,\varphi) + \dots
\end{aligned}
$$

Здесь c — комплексная, а M, N и P — действительные функции. Последние три функции не являются произвольными. Из дополнительных условий (5) получим для них следующие уравнения:

$$\dot{M}(u,\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{2}\langle 2\,|\,00\rangle + \frac{1}{4}(\tilde{\eth}_1\tilde{\eth}_2\dot{c} + \overline{\eth_1\eth_2\dot{c}}), \qquad (14)$$

$$3[i\dot{N}(u,\vartheta,\varphi) + \dot{P}(u,\vartheta,\varphi)] = \langle 2\,|\,i02+03\rangle - i\eth_0 M + \frac{i}{4}\eth_0(\tilde{\eth}_1\tilde{\eth}_2 c - \overline{\tilde{\eth}_1\tilde{\eth}_2 c}), \qquad (15)$$

$$\langle 2\,|\,00\rangle = 2\dot{c}\dot{\bar{c}}, \qquad (16)$$

$$\langle 2\,|\,i02+03\rangle = -i\dot{\bar{c}}\eth_2 c - 3ic\overline{\tilde{\eth}_2\dot{c}}. \qquad (17)$$

Функцию c называют функцией информации, она определяет ход изменения M, N и P во времени.

При наличии электромагнитного поля можно также пользоваться уравнениями (8)—(11), (14), (15), если включить в $\langle\mu\nu\rangle$ еще $8\pi T_{\mu\nu}$, где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

3. Метод одновременного разделения переменных во всех приближенных уравнениях Эйнштейна

Проинтегрируем уравнения (8)—(11), (14), (15) для n-го приближения (букву n под членами n-го порядка писать не будем). Сделаем следующие разложения по r^{-s} и Y^l_{sm}:

$$F = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{slm}(u)\,r^{-s}Y^l_{2m}(\vartheta,\varphi), \qquad (18)$$

$$\langle\mu\nu\rangle = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\langle s\,|\mu\nu|\,lm\rangle\,r^{-s}Y^l_{nm}(\vartheta,\varphi), \qquad (19)$$

где

$$
\begin{aligned}
n &= 0, \quad \text{если} \quad \mu\nu = 00,\ 11,\ 22+33; \\
n &= 1, \quad \text{если} \quad \mu\nu = i02+03,\ i12+13; \\
n &= 2, \quad \text{если} \quad \mu\nu = 22-33-2i23;
\end{aligned}
$$

$$M = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mu_{lm}(u)\,Y^l_{0m}(\vartheta,\varphi), \qquad (20)$$

$$-P - iN = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\nu_{lm}(u)\,Y^l_{1m}(\vartheta,\varphi). \qquad (21)$$

Если (18)—(21) подставить в уравнения (8)—(10), то переменные разделяются и после интегрирования по r имеем

$$\beta = -\frac{1}{4}\sum_{s}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{s}\langle s+2\,|11|\,lm\rangle\,r^{-s}Y^l_{0m}; \qquad (22)$$

$$G=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\sum_{s}\left[-\frac{(s+1)\sqrt{l(l+1)}}{2s(s-1)(s-3)}\langle s+1|11|lm\rangle-\frac{2}{s(s-3)}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\langle s|i12+13|lm\rangle-\frac{2(s-1)\sqrt{(l+2)(l-1)}}{s(s-3)}\alpha_{s-1,lm}\right]r^{-s}+$$

$$\left.+\frac{2\nu_{lm}}{r^3}\right\}Y^l_{1m},\tag{23}$$

$$V=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\sum_{s\neq 0}\left[\frac{\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}}{(s-1)(s+2)}\alpha^+_{s+1,lm}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2s}\langle s+1|22+33|lm\rangle-\frac{(s-2)\sqrt{l(l+1)}}{2s(s+2)(s-1)}\langle s+2|i12+13|lm\rangle^++$$

$$\left.+\frac{1}{2s(s+1)}\left(1+\frac{2l(l+1)}{(s+2)(s-1)}\langle s+3|11|lm\rangle\right]r^{-s}-$$

$$\left.-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2r}\nu^+_{lm}-2\mu_{lm}\right\}Y^l_{0m}.\tag{24}$$

Здесь $f^{\pm}_{lm}\equiv f_{lm}\pm(-1)^m\bar{f}_{l,-m}$.

Из уравнений (11), (14), (15) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mu}_{lm}=-\frac{1}{4}\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}\,\dot{\alpha}^+_{1lm}+q_{0lm},\tag{25}$$

$$\dot{\nu}_{lm}=\frac{\sqrt{l(l+1)}}{3}\left(\mu_{lm}+\frac{1}{4}\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}\,\alpha^-_{1lm}\right)+\frac{1}{3}q_{1lm},\tag{26}$$

$$\dot{\alpha}_{s+1,lm}=\frac{(s-1)(l-s+1)(l+s)}{2(s+1)(s-2)}\alpha_{slm}-$$

$$-\frac{\sqrt{(l+2)(l-1)}}{4}\nu_{lm}\delta_{s2}+\frac{1}{2s}q_{slm},\quad s\geqslant 2;\tag{27}$$

$$q_{0lm}\equiv-\frac{1}{2}\langle 2|00|lm\rangle,\tag{28}$$

$$q_{1lm}\equiv-\langle 2|i02+03|lm\rangle,\tag{29}$$

$$q_{slm}\equiv\frac{1}{(s+1)(s-2)}\left[\frac{1}{2}\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}\langle s+2|11|lm\rangle+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(l-1)(l+2)}\,(s-1)\langle s+1|i12+13|lm\rangle\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\langle s|22-33-2i23|lm\rangle,\quad s\geqslant 2.\tag{30}$$

Решение системы (25)—(27) вполне определено, если известны функции интегрирования $\alpha_{1lm}(u)$, $\mu_{lm}(u_0)$, $\nu_{lm}(u_0)$ и $\alpha_{slm}(u_0)$, $s\geqslant 2$. Однако при дальнейшем изучении решения оказывается, что выбор α_{1lm} не совсем произволен, а ограничен требованием сходимости решения.

В физическом аспекте самыми существенными являются величины μ_{00}, μ_{1m} и ν_{1m}, ибо они определяют массу (m), импульс $(\mathbf{p})$ и импульс вращения $(\mathbf{l})$ источника [2]:

$$m = \mu_{00}; \tag{31}$$

$$\left\{\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(\mu_{1,-1} - \mu_{11}),\\ p_y &= -\frac{i}{3\sqrt{2}}(\mu_{1,-1} + \mu_{11}),\\ p_z &= \frac{1}{3}\mu_{10};\end{aligned}\right. \tag{32}$$

$$\left\{\begin{aligned} l_x &= -\frac{i}{4}(\nu_{11} - \nu_{1,-1} - \bar{\nu}_{11} + \bar{\nu}_{1,-1}),\\ l_y &= \frac{1}{4}(\nu_{11} + \nu_{1,-1} + \bar{\nu}_{11} + \bar{\nu}_{1,-1}),\\ l_z &= \frac{i}{2\sqrt{2}}(\nu_{10} - \bar{\nu}_{10}).\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Основной интерес представляет изучение изменений величин (31)—(33). Но чтобы показать, что наш метод «работает» при любых степенях $1/r$, вычислим далее для квадрупольного излучения в первом и втором приближениях все отличные от нуля a_{slm}. Так как во втором приближении уравнения для коэффициентов разложения также линейные, то вклад $\langle\mu\nu\rangle$ различных типов будем вычислять отдельно. Решение всей системы можно затем записать в виде суммы решений, при нахождении которых учитывается только одна или другая часть $\langle\mu\nu\rangle$.

4. Гравитационное квадрупольное излучение

Приведем сначала решение для линейного приближения. Пусть $a_{12m} \equiv \ddot{Q}_m(u)$. Учитывая, что $\underset{1}{\langle\mu\nu\rangle} = 0$, получим из (22)—(24) и (25)—(27) следующее решение:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,\\ F &= \left[\frac{\ddot{Q}_m}{r} + \frac{(-1)^m}{r^3}\bar{Q}_{-m}\right] Y^2_{2m},\\ G &= \left[\frac{2}{r^2}\ddot{Q}_m - \frac{4(-1)^m}{r^3}\dot{\bar{Q}}_{-m} - \frac{3(-1)^m}{r^4}\bar{Q}_{-m}\right] Y^2_{1m},\\ V &= \left[\sqrt{6}\,\ddot{Q}_m + \frac{\sqrt{6}}{r}\dot{Q}^+_m + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,r^2}Q^+_m\right] Y^2_{0m} - 2m,\end{aligned} \tag{34}$$

где m — масса источника.

Приступим к рассмотрению второго приближения. Зная линейное приближение, можем при помощи формул (12) определить нелинейные члены второго порядка $\langle\mu\nu\rangle$ и по формулам (28)—(30) вычислить величины q_{slm}, которые содержатся в уравнениях (25)—(27).

Далее в этом пункте рассмотрим вклад в решение только тех нелинейных членов, в которые не входит масса m. Для исключения расходимостей выберем a_{1lm} в следующем виде:

$$\alpha_{12m} = \sum_{m'+m''=m} \frac{(-1)^{m''}}{\sqrt{21}} C_{2m'm''} [6 \dddot{Q}_{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m''} + 9 \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} - \int \dddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \, du],$$

$$\alpha_{13m} = \sum_{m'+m''=m} \frac{(-1)^{m''}}{10\sqrt{3}} C_{3m'm''} \Big[4 \frac{d}{du} (\dddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''}) +$$

$$+ 10 \dddot{Q}_{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m''} + 13 \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} - \int \dddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \, du \Big],$$

$$\alpha_{14m} = \sum_{m'+m''=m} \frac{-1}{10\sqrt{7}} C_{4m'm''} \Big[\frac{5}{2} (-1)^m \frac{d^3}{du^3} (\dot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''}) +$$

$$+ \frac{2(-1)^{m'}}{3} \dddot{\bar{Q}}_{-m'} \ddot{Q}_{m''} + \frac{(-1)^{m''}}{3} \frac{d}{du} (\dddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''}) +$$

$$+ \frac{5(-1)^{m'}}{3} \ddddot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{Q}_{m''} + \frac{(-1)^{m''}}{3} \int \dddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \, du \Big]. \qquad (35)$$

Здесь и в дальнейшем $C_{lm'm''}$ обозначает коэффициент Клебша—Гордана $C(2, 2, l; m', m'', m'+m'')$. Суммирование производится по всевозможным значениям индексов m' и m'' так, что $m'+m''=m$.

Из уравнений (25)—(27) получим следующее решение:

$$\mu_{00} = -\frac{1}{5} \sum_{m=-2}^{2} \int \dddot{Q}_m \dddot{\bar{Q}}_m \, du,$$

$$\mu_{1m} = \sum_{m'+m''=m} \Big(-\sqrt{\frac{2}{5}} (-1)^{m''} C_{1m'm''} \int \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \, du \Big),$$

$$\mu_{2m} = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^{m''} C_{2m'm''} [2 \dddot{Q}_{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m''} + 3 \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''}],$$

$$\mu_{3m} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^{m''} C_{3m'm''} \Big[4 \frac{d}{du} (\dddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''}) + \qquad (36)$$

$$+ 10 \dddot{Q}_{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m''} + 13 \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \Big],$$

$$\mu_{4m} = \frac{3}{\sqrt{70}} \sum_{m'+m''=m} C_{4m'm''} \Big[\frac{5}{2} (-1)^m \frac{d^3}{du^3} (\dot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''}) +$$

$$+ \frac{1}{3} (-1)^{m''} \frac{d}{du} \dddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} + \frac{5}{3} (-1)^{m'} \ddddot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{Q}_{m''} + \frac{2}{3} (-1)^{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m'} \ddot{Q}_{m''} \Big];$$

$$\nu_{1m} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^{m''} C_{1m'm''} \Big[\frac{1}{3} \int du \int \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \, du -$$

$$- \int \ddot{Q}_{m'} \dddot{\bar{Q}}_{-m''} \, du \Big],$$

$$\nu_{2m} = -\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^{m''} C_{2m'm''} \ddot{Q}_{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m''},$$

$$\nu_{3m} = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^{m''} C_{3m'm''} \left[\frac{2}{3} \dddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} + \frac{5}{3} \ddot{Q}_{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m''} \right], \qquad (37)$$

$$\nu_{4m} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \sum_{m'+m''=m} C_{4m'm''} \left[\frac{(-1)^m}{2} \frac{d^2}{du^2} \left(\dot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m'}}{3} \dddot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{Q}_{m''} + \frac{(-1)^{m''}}{15} \dddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} \right];$$

$$\alpha_{32m} = 0,$$

$$\alpha_{33m} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^{m''} C_{3m'm''} \ddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''},$$

$$\alpha_{34m} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} \sum_{m'+m''=m} C_{4m'm''} \left[\frac{15}{2} (-1)^m \frac{d}{du} \left(\dot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} \right) + \right.$$

$$\left. + 5(-1)^{m'} \ddot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{Q}_{m''} + (-1)^{m''} \ddot{Q}_{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} \right];$$

$$\alpha_{42m} = 0,$$

$$\alpha_{43m} = 0,$$

$$\alpha_{44m} = -\frac{5\sqrt{7}}{4} \sum_{m'+m''=m} C_{4m'm''} \left[\frac{3}{2} (-1)^m \dot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} + (-1)^{m'} \dot{\bar{Q}}_{-m'} \dot{Q}_{m''} \right];$$

$$\alpha_{52m} = -\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \sum_{m'+m''=m} (-1)^m C_{2m'm''} \bar{Q}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''},$$

$$\alpha_{53m} = -\frac{9\sqrt{3}}{4} \sum_{m'+m''=m} (-1)^m C_{3m'm''} \bar{Q}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''},$$

$$\alpha_{54m} = -\frac{3}{2\sqrt{7}} \sum_{m'+m''=m} C_{4m'm''} \left[\frac{9}{2} (-1)^m \bar{Q}_{-m'} \dot{\bar{Q}}_{-m''} + 7 \bar{Q}_{-m'} \dot{Q}_{m''} (-1)^{m'} \right];$$

$$\alpha_{62m} = -\frac{\sqrt{21}}{2} \sum_{m'+m''=m} (-1)^m C_{2m'm''} \bar{Q}_{-m'} \bar{Q}_{-m''}, \qquad (38)$$

$$\alpha_{63m} = 0,$$

$$\alpha_{64m} = \sqrt{7} \sum_{m'+m''=m} (-1)^m C_{4m'm''} \bar{Q}_{-m''} \bar{Q}_{-m'};$$

$$\alpha_{72m} = 0,$$

$$\alpha_{73m} = 0,$$

$$\alpha_{74m} = 0.$$

Отсюда получим по формулам (31)—(33) монотонные изменения массы, импульса и импульса вращения источника:

$$\dot{m} = -\frac{1}{5}\sum_{m=-2}^{2} \dddot{Q}_m \overline{\dddot{Q}}_m; \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\sqrt{2}}{15}\left[\sqrt{2}\,\dddot{Q}_{(1}\overline{\dddot{Q}}_{2)} + \sqrt{3}\,\dddot{Q}_{(0}\overline{\dddot{Q}}_{1)} + \sqrt{3}\,\dddot{Q}_{(-1}\overline{\dddot{Q}}_{0)} + \sqrt{2}\,\dddot{Q}_{(-2}\overline{\dddot{Q}}_{-1)}\right],\\ \dot{p}_y &= \frac{i\sqrt{2}}{15}\left[\sqrt{2}\,\dddot{Q}_{[1}\overline{\dddot{Q}}_{2]} + \sqrt{3}\,\dddot{Q}_{[0}\overline{\dddot{Q}}_{1]} + \sqrt{3}\,\dddot{Q}_{[-1}\overline{\dddot{Q}}_{0]} + \sqrt{2}\,\dddot{Q}_{[-2}\overline{\dddot{Q}}_{-1]}\right],\\ \dot{p}_z &= \frac{1}{15}\left[-2\dddot{Q}_2\overline{\dddot{Q}}_2 - \dddot{Q}_1\overline{\dddot{Q}}_1 + \dddot{Q}_{-1}\overline{\dddot{Q}}_{-1} + 2\dddot{Q}_{-2}\overline{\dddot{Q}}_{-2}\right]; \end{aligned}\right. \tag{40}$$

$$\left\{\begin{aligned} \dot{l}_x &= \frac{i}{5}\left[\left(\ddot{Q}_{(2}\overline{\dddot{Q}}_{1)} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\ddot{Q}_{(1}\overline{\dddot{Q}}_{0)} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\ddot{Q}_{(0}\overline{\dddot{Q}}_{-1)} + \ddot{Q}_{(-1}\overline{\dddot{Q}}_{-2)}\right) - c.c.\right],\\ \dot{l}_y &= -\frac{1}{5}\left[\left(\ddot{Q}_{[2}\overline{\dddot{Q}}_{1]} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\ddot{Q}_{[1}\overline{\dddot{Q}}_{0]} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\ddot{Q}_{[0}\overline{\dddot{Q}}_{-1]} + \ddot{Q}_{[-1}\overline{\dddot{Q}}_{-2]}\right) + c.c.\right],\\ \dot{l}_z &= \frac{i}{10}\left[\left(2\ddot{Q}_2\overline{\dddot{Q}}_2 + \ddot{Q}_1\overline{\dddot{Q}}_1 - \ddot{Q}_{-1}\overline{\dddot{Q}}_{-1} - 2\ddot{Q}_{-2}\overline{\dddot{Q}}_{-2}\right) - c.c.\right]. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Здесь $2P_{(a}Q_{b)} \equiv P_aQ_b + P_bQ_a$; $2P_{[a}Q_{b]} \equiv P_aQ_b - P_bQ_a$; *c.c.* обозначает комплексно-сопряженное выражение. Эти монотонные изменения естественно интерпретировать как унос массы, импульса и импульса вращения источника гравитационными волнами.

5. Связь Q_m с источником

Связь коэффициентов разложения функции информации α_{1lm} со структурой источника легче всего найти исходя из линеаризованных уравнений Эйнштейна в гармонических координатах

$$\left\{\begin{aligned} \Box g_{0i} &= 16\pi T_{0i},\\ \Box g_{00} &= \;\;8\pi(T_0^0 - T_s^s) \end{aligned}\right. \tag{42}$$

$$\left(\Box \equiv \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

Интегралы этих уравнений можно далеко от источников разложить в ряды по степеням $1/r$ и шаровым функциям Y^l_{sm}. Переходя к соответствующим полярным координатам, имеем

$$\left\{\begin{aligned} g_{00} &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mathfrak{a}_{slm} r^{-s} Y^l_{0m},\\ -ig_{0\vartheta} - \frac{1}{\sin\vartheta}\, g_{0\varphi} &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mathfrak{g}_{slm} r\; Y^l_{1m}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Используя преобразование гармонических координат в обобщенные координаты Бонди, можно вывести следующие общие формулы, связывающие α_{1lm} с коэффициентами разложений в (43):

$$\overset{+}{\alpha}_{1lm} = \sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{l(l-1)}}\,\alpha_{1lm}, \tag{44}$$

$$\overset{-}{\alpha}_{1lm} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l+2}{l-1}}\,\overset{-}{g}_{0lm}, \tag{45}$$

$$\alpha_{1lm} = \frac{1}{2}(\overset{+}{\alpha}_{1lm} + \overset{-}{\alpha}_{1lm}). \tag{46}$$

Остается еще выразить α_{1lm} и $\overset{-}{g}_{0lm}$ через мультипольную структуру источника.

Определим мультипольные моменты источника

$$I^{(p)}_{lm} \equiv \int (T^0_0 - T^s_s)\, r^p\, \overline{Y}^l_{0m}\, dV, \tag{47}$$

$$M^{(p)}_{lm} \equiv \int \frac{1}{r}\left(-iT_{0\vartheta} - \frac{1}{\sin\vartheta}T_{0\varphi}\right) r^p \overline{Y}^l_{1m}\, dV. \tag{48}$$

$I^{(p)}_{lm}$ можно назвать мультипольными моментами электрического типа и $M^{(p)}_{lm}$ — магнитного типа. Более детальный анализ значения аналогичным образом определенных мультипольных моментов для электромагнитного излучения проведен в работе [3].

При квадрупольном излучении от нуля отличаются только $I^{(2)}_{2m}$ и $M^{(2)}_{2m}$, и по аналогии со случаем электромагнитного поля [3] можно получить следующий результат:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{12m} &= -\frac{2}{3}\ddot{I}^{(2)}_{2m}, \\ \overset{-}{g}_{02m} &= \frac{4}{3}\ddot{M}^{(2)-}_{2m}, \\ \alpha_{12m} &\equiv \ddot{Q}_m = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ddot{I}^{(2)}_{2m} + \frac{2}{3}\ddot{M}^{(2)-}_{2m}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Так как $M^{(2)}_{2m}$ того же порядка величины, что и $\dot{I}^{(3)}_{3m}$, то в нашем приближении мы их отбросим и ограничимся рассмотрением только $I^{(2)}_{2m}$. (Аналогично в электродинамике магнитный квадрупольный момент имеет тот же порядок величины, что и электрический октопольный момент.) Для краткости обозначим в дальнейшем $I^{(2)}_{2m} \equiv I_m$ и найдем по формулам (39)—(41) выражения монотонных изменений массы, импульса и импульса вращения источника:

$$\dot{m} = -\frac{2}{15}\sum_{m=-2}^{2}\dddot{I}_m\dddot{\overline{I}}_m; \tag{50}$$

$$\dot{\mathrm{p}} = 0; \tag{51}$$

$$
\begin{cases}
\dot{l}_x = \dfrac{4i}{15}\left[\left(\ddot{I}_{(2}\dddot{\overline{I}}_{1)} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\ddot{I}_{(1}\dddot{\overline{I}}_{0)}\right) - c.c.\right], \\
\dot{l}_y = -\dfrac{4}{15}\left[\left(\ddot{I}_{[2}\dddot{\overline{I}}_{1]} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\ddot{I}_{[1}\dddot{\overline{I}}_{0]}\right) + c.c.\right], \\
\dot{l}_z = \dfrac{2i}{15}\left[(2\ddot{I}_2\dddot{\overline{I}}_2 + \ddot{I}_1\dddot{\overline{I}}_1) - c.c.\right].
\end{cases}
\tag{52}
$$

Эти результаты согласуются с результатами других авторов, которые пользовались псевдотензором энергии-импульса [4–9]. С помощью функции информации выражение (50) получили также Т. А. Морган и А. Перес [10].

6. О «хвостах» излучения

В данном пункте проинтегрируем уравнения (27) с учетом тех нелинейных членов, в которые входит множителем масса источника m. Отличными от нуля являются только следующие q_{slm}:

$$q_{22m} = 2m\ddot{Q}_m, \tag{53}$$

$$q_{42m} = 18(-1)^m m\overline{Q}_{-m}. \tag{54}$$

Подставляя (53) в (27), имеем

$$\dot{\alpha}_{32m} = \frac{m}{2}\dot{Q}_m. \tag{55}$$

Интегралы остальных уравнений

$$\dot{\alpha}_{s+1,2m} = \frac{(s-1)(3-s)(2+s)}{2(s+1)(s-2)}\alpha_{s2m} + \frac{9}{4}(-1)^m m\overline{Q}_{-m}(u)\,\delta_{s4}, \qquad s \geqslant 3, \tag{56}$$

целесообразно найти в частном случае, когда источник излучает только в конечном промежутке времени $u_0 < u < u_1$, а в остальное время является статическим, т. е. $Q_m(u) = \mathrm{const}$, если $u \leqslant u_0$ или $u \geqslant u_1$. При $s = 3$ уравнение (56) дает

$$\alpha_{42m} = A_m, \quad A_m = \mathrm{const}.$$

Значение постоянной A_m в первоначальном статическом случае определяется из уравнений (56) и из условия $\dot{\alpha}_{52m}(u < u_0) = 0$

$$-\frac{9}{10}A_m + \frac{9}{4}(-1)^m m\overline{Q}_{-m} = 0,$$

откуда

$$A_m = \frac{5}{2}(-1)^m m\overline{Q}_{-m}(u_0). \tag{57}$$

Найдем интеграл уравнений (56) для любых u. Обозначим

$$D_m(u) \equiv \frac{9}{4}(-1)^m m[\overline{Q}_{-m}(u) - \overline{Q}_{-m}(u_0)]. \tag{58}$$

Тогда система (56) дает следующее решение:

$$\begin{aligned} &\alpha_{42m} = \text{const} = A_m, \\ &\alpha_{52m} = \int_{u_0}^{u} D_m(\tau)\,d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{5+k,2m} = \frac{(-1)^k}{2^k}\frac{(6+k)!}{(5+k)!}\frac{(3+k)}{3}\frac{5!(k+1)!}{6!}\times \\ &\times\int_{u_0}^{u} d\tau_k \int_{u_0}^{\tau_k} d\tau_{k-1} \ldots \int_{u_0}^{\tau_1} D_m(\tau)\,d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{59}$$

В последнем выражении $(k+1)$-кратный интеграл равняется однократному интегралу

$$\frac{1}{k!}\int_{u_0}^{u} D_m(u)\,(u-\tau)^k\,d\tau.$$

При $u - u_0 < 2r$ бесконечный ряд для F можно просуммировать и мы имеем *

$$F = \left[\frac{A_m}{r^4} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{5+k,2m}}{r^{k+5}}\right] Y^2_{2m} = \left[\frac{B''_m}{r} - \frac{2B'_m}{r^2} + \frac{B_m}{r^3} + \frac{A_m}{r^4}\right] Y^2_{2m}, \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned} &B_m \equiv (-1)^m 2m \int_{u_0}^{u} \frac{[\overline{Q}_{-m}(\tau) - \overline{Q}_{-m}(u_0)]}{(u+2r-\tau)^2}\,d\tau, \\ &B'_m \equiv \frac{\partial B_m}{\partial v} = \frac{\partial B_m}{2\partial r}, \qquad v = u + 2r. \end{aligned} \tag{61}$$

Далее можно было бы найти при помощи формул (23), (24) бесконечные ряды для G и V, просуммировать их и получить решение всей системы при $u - u_0 < 2r$. Но (60) можно подставить и непосредственно в уравнения (9), (10) и найти оттуда G и V:

$$G = \left[\frac{2B''_m}{r^3} - \frac{3B_m}{r^4} - \frac{8A_m}{5r^5}\right] Y^2_{1m}, \tag{62}$$

$$V = \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{B^+_m}{r^2} - \frac{7}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{A^+_m}{r^3}\right] Y^2_{0m}. \tag{63}$$

Подстановка последних выражений в уравнение (11) подтверждает, что (60)—(63) являются интегралами уравнений Эйнштейна не только при $u - u_0 < 2r$, а при любых значениях u и r. Решение (60)—(63) в аксиально-симметричном случае было найдено У. Б. Боннором и М. А. Ротенбергом [11].

Для интерпретации величин B_m отметим, что поскольку они зависят от аргумента обратной волны $v = u + 2r$, то их естественно отождествить с мультипольными моментами отраженной волны. После прохождения первоначального возмущения поле остается нестатическим, так

---

* Эти ряды просуммированы И. Пийром.

как при $u > u_1$ $\dot{B}_m \neq 0$, т. е. у первичной волны возникает «хвост». В следующем пункте остановимся на некоторых неправильных выводах, которые обычно делаются насчет «хвостов» и законов сохранения Ньюмэна—Пенроуза.

7. О законах сохранения Ньюмэна—Пенроуза и их интерпретации

В предыдущем пункте мы показали, что

$$a_{42m} = A_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \tag{64}$$

где $A_m = \mathrm{const}$. Эти сохраняющиеся величины открыты Э. Ньюмэном и Р. Пенроузом [12, 13], но другим методом. Близок к нашему вывод законов сохранения в работе М. Г. Дж. Ван дер Бурга [1]. В общепринятой интерпретации законов сохранения много спорного. Например, в работах [12, 13] законы сохранения пытаются связать с правилами отбора. В [12] утверждается, что переход от первоначального стационарного состояния при $u = u_0$ к конечному стационарному состоянию (т. е. к состоянию без «хвоста») возможен тогда и только тогда, когда $Q_m(u_0) = Q_m(u_1)$, и отсюда пытаются вывести своеобразные правила отбора для переходов между стационарными состояниями. Но изучение поведения функции F при $u > u_1$ показывает, что это не так. Действительно, при $u > u_1$

$$B_m = 2m(-1)^m \int_{u_0}^{u_1} \frac{\overline{Q}_{-m}(\tau) - \overline{Q}_{-m}(u_0)}{(u + 2r - \tau)^2} d\tau + \\ + 2m(-1)^m \left[\frac{1}{2r} - \frac{1}{u + 2r - u_1} \right] \Delta \overline{Q}_{-m}, \tag{65}$$

где $\Delta Q_m \equiv Q_m(u_1) - Q_m(u_0)$. Отсюда видно, что $\dot{B}_m \neq 0$ даже тогда, когда $\Delta Q_m = 0$, и у нас нет основания особо выделять этот случай. Более того, так как по (65) и (60) «хвост» излучения возникает всегда, то при $u = u_1$ поле всегда нестационарное и становится статическим только асимптотически при $u \to \infty$, $r = \mathrm{const}$.

Суть законов сохранения легче всего уяснить из анализа выражений (65) и (60). Если $u - u_1 < 2r$, то

$$\frac{1}{u + 2r - u_1} = \frac{1}{2r} - \frac{u - u_1}{4r^2} + \ldots, \quad B_m = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

и выражения (60), (18) дают

$$a_{42m} = A_m = \mathrm{const}.$$

Если же в выражении (65) перейти к пределу $u \to \infty$ при $r = \mathrm{const}$, то

$$\lim_{u \to \infty} B_m = \frac{1}{r} (-1)^m m \Delta \overline{Q}_{-m}$$

и из (60) получаем

$$\lim_{u \to \infty} a_{42m} = \frac{5}{2} (-1)^m m [\overline{Q}_{-m}(u_0) + \Delta \overline{Q}_{-m}]. \tag{66}$$

Отсюда видно, что законы сохранения имеют место только в ограниченной области пространства-времени $u - u_1 < 2r$, т. е. с ростом u мы должны удаляться от источников в область все более слабых полей. Для покоящегося же относительно источника наблюдателя законы сохранения Ньюмэна—Пенроуза нарушаются.

Приложение

а) Шаровые функции Y^l_{nm} со спином n:

$$Y^l_{nm}(\vartheta, \varphi) \equiv P^l_{nm}(\cos\vartheta)\, e^{im\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Определение P^l_{nm} дано в [14].

б) Операторы $\eth_n$ и $\tilde{\eth}_n$:

$$\eth_n \equiv \sin^n\vartheta \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\sin^{-n}\vartheta$$

$$\tilde{\eth}_n \equiv \sin^{-n}\vartheta \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\sin^{n}\vartheta;$$

$$\eth_n Y^l_{nm} = -i\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\, Y^l_{n+1,m},$$

$$\tilde{\eth}_n Y^l_{nm} = -i\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\, Y^l_{n-1,m}.$$

В заключение авторы выражают свою благодарность И. Пийру за суммирование ряда с коэффициентами (59).

ЛИТЕРАТУРА

1. Van der Burg M.G.J., Proc. Roy. Soc., **A294**, 112 (1966).
2. Unt V., Preprint FAI — 1, Tartu, 1969.
3. Керес П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 264 (1971).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1967.
5. Bonnor W. B., Rotenberg M. A., Proc. Roy. Soc., **A265**, 109 (1961).
6. Cooperstock F. I., Booth D. J., Nuovo Cim., Serie X, **62B**, 163 (1969).
7. Peres A., Nuovo Cim., **X 15**, 351 (1960).
8. Peres A., Phys. Rev., **128**, 2471 (1962).
9. Morgan T. A., Peres A., Phys. Rev., **131**, 494 (1963).
10. Morgan T. A., Peres A., Nuovo Cim., Serie X, **27**, 1266 (1963).
11. Bonnor W. B., Rotenberg M. A., Proc. Roy. Soc., **A289**, 247 (1966).
12. Newman E., Penrose R., Phys. Rev. Lett., **15**, 231 (1965).
13. Newman E., Penrose R., Proc. Roy. Soc., **A305**, 175 (1968).
14. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958.

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/I 1971

PIRET KERES, V. UNT

GRAVITATSIOONILINE KVADRUPOLKIIRGUS

Töötati välja skeem Einsteini võrrandite integreerimiseks järkjärgulise lähendamise ja muutujate eraldamise meetodil. Seda skeemi on rakendatud kvadrupolkiirguse korral. Üksikasjaliselt on vaadeldud teist lähendit.

PIRET KERES, V. UNT

GRAVITATIONAL QUADRUPOLE RADIATION

A technique for integrating the Einstein equations by the successive approximation method and separation of variables is worked out. The method is applied in the case of gravitational quadrupole radiation. A detailed analysis of the second approximation is given.