EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.1.02

УДК 530.12 : 531.51

В. УНТ, ПИРЕТ КЕРЕС

О «ХВОСТАХ» ВОЛН В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Исследован разброс волн в поле Шварцшильда на кривизне пространства-времени. Вычисления доведены до третьего приближения. Рассмотрение электромагнитного и гравитационного излучений сведено к рассмотрению скалярного волнового уравнения.

1. Введение

При рассмотрении гравитационных волн от физически реальных источников из-за сложности уравнений поля приходится ограничиваться приближенными решениями. Долгое время не удавалось идти даже дальше первого приближения. Но именно в высших приближениях могут появляться интересные, качественно новые явления. В данной статье нас интересует одно такое явление — отражение (разброс) волн на кривизне пространства-времени. Вследствие разброса волны появляются «хвосты» излучения — после прохождения возмущения первого приближения поле остается нестатическим. На возможность появления «хвостов» указал Х. Бонди [1]. Неизбежность существования «хвоста» скалярной и электромагнитной волн в поле Шварцшильда доказали В. Кундт и Э. Ньюмэн [2]. К выводу о существовании отраженных волн в поле Шварцшильда пришли также Э. Ньюмэн и Р. Пенроуз [3, 4]. Во втором приближении «хвосты» для гравитационного мультипольного излучения вычислили В. Боннор и М. Ротенберг [5], А. Хантер и М. Ротенберг [6], В. Коуч и др. [7]. Скалярные волны в поле Шварцшильда рассмотрели С. Базанский [8] и И. Пийр [9], электромагнитные волны — Р. Манкин и И. Пийр [10]. В данной работе мы частично воспроизводим новым методом результаты вышеуказанных авторов. Большую роль при нашем подходе играет симметричная запись уравнений поля, в которых в одном случае аргументом является запаздывающая координата времени, в другом — опережающая координата времени. Благодаря этому удалось значительно упростить вычисления и пойти дальше других авторов. Новым является также сведение анализа всех видов излучения к рассмотрению скалярного излучения.

В данной работе мы проинтегрируем вплоть до третьего приближения волновые уравнения для скалярных, электромагнитных и гравитационных волн в поле Шварцшильда. При этом будем пользоваться линейным элементом Шварцшильда в нулевых полярных координатах

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2du\, dr - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \tag{1}$$

Здесь m — масса центрального тела; единицы измерения выбраны так, что скорость света и гравитационная постоянная равны единице. Мы рассмотрим радиально излучающий источник. Испущенные им волны распространяются вдоль изотропных геодезических $u = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Назовем эти волны прямыми. Как увидим в дальнейшем, на кривизне пространства-времени происходит отражение прямых волн. Появляются так называемые обратные волны, распространяющиеся вдоль изотропных геодезических $\tilde{v} \equiv -u - 2r - 4m \ln(r - 2m) = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$.

Одно из преимуществ линейного элемента (1) по сравнению с обычным линейным элементом Шварцшильда состоит в том, что уравнения изотропных геодезических для прямых волн не содержат логарифмических членов. Поэтому не раз высказывалось предположение, что волновые решения в этих координатах вообще не содержат членов логарифмического типа. На этом предположении основываются доказательства ряда теорем. Но так как в точной теории с прямой волной всегда связана обратная (отраженная) волна с аргументом $-u - 2r - 4m \ln(r - 2m)$, то при рассмотрении волновых процессов в координатах (1) невозможно избежать логарифмических членов.

Решение φ для волнового уравнения ищем методом последовательных приближений $\varphi = \underset{1}{\varphi} + \underset{2}{\varphi} + \ldots$, где $\underset{1}{\varphi}$ — решение волнового уравнения в плоском пространстве-времени, а $\underset{n+1}{\varphi} \sim m^n$. Влиянием волн на метрику будем пренебрегать. Мы ограничимся вторым и третьим приближениями и рассмотрим волновые решения скалярного уравнения, уравнений Максвелла и уравнений Эйнштейна. Анализ двух последних случаев сведем к рассмотрению скалярного волнового уравнения. Поэтому в первых параграфах статьи займемся более подробным анализом скалярного волнового уравнения. Мы покажем, что первичная прямая волна первого приближения порождает во втором приближении вторичные прямые и обратные волны. Вследствие линейности волнового уравнения эти два типа волн можно рассматривать отдельно. Прямые вторичные волны вычисляются просто, и приводить их мы не будем. Во втором приближении вычислим только обратные волны. Вторичная волна в свою очередь порождает в третьем приближении третичные обратные и прямые волны и т. д. Между третьим и вторым приближением имеется полная математическая аналогия за исключением появления логарифмических членов. Поэтому в третьем приближении вычислим только члены логарифмического типа. Мы покажем, что их можно интерпретировать как поправку к аргументу обратной волны. Использование изотропной координаты $u = t - r$ вместо обычной координаты t вносит в проблему некоторые своеобразные черты уже в первом приближении. Мы коснемся и этих проблем.

2. Скалярное волновое уравнение в первом приближении

Рассмотрим обычное волновое уравнение для скалярного поля в координатах (1) при $m = 0$

$$\frac{2}{r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{,r} - \Delta\varphi = 0, \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа. Если решение уравнения (2) искать в виде

$$\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{slm}(u) r^{-s} Y_l^m(\vartheta, \varphi), \tag{3}$$

где Y_l^m — шаровые функции, то получим рекуррентные уравнения

$$2s\dot{a}_{s+1,lm}(u) = (l+s)(l-s+1) a_{slm}. \tag{4}$$

Разложения типа (3) важны с точки зрения общей теории относительности, и поэтому мы остановимся на них более подробно.

Решение уравнений (4) определяется одной произвольной функцией $a_{1lm}(u)$ и постоянными интегрирования, которые сначала берем равными нулю. Тогда при $s \geqslant l+2$ коэффициенты $a_{slm} = 0$. Определенным коэффициентам a_{1lm} соответствует определенная мультипольная структура источника. Вместо a_{1lm} может быть взят и какой-нибудь другой коэффициент a_{slm}, $s \leqslant l+1$, например $a_{l+1,lm}(u) = A_{lm}(u)$. Тогда

$$a_{l+1-p,lm}(u) = \frac{2^p l!(2l-p)!}{(l-p)!(2l)!p!} \frac{d^p}{du^p} A_{lm}(u), \quad 0 \leqslant p \leqslant l. \tag{5}$$

При $A_{lm} = \mathrm{const}$ имеем поле постоянного мультиполя.

До сих пор мы описывали испущенное источником излучение. Будем называть соответствующие волны прямыми. Далее покажем, что в полной аналогии с прямыми волнами можно описывать сходящиеся к источнику волны, которые будем называть обратными. Если вместо u ввести новую координату времени $v = -u - 2r$, то в новых координатах обратная волна $\psi(v, r, \vartheta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{2}{r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_{,r} - \Delta\psi = 0. \tag{2a}$$

Уравнения (2) и (2а) совпадают, только один аргумент u заменен другим аргументом v. Следовательно, решение уравнения (2а) имеет такой же вид, как и решение уравнения (2)

$$\psi(v, r, \vartheta, \varphi) = \sum_{s=1}^{l+1} b_{slm}(v) r^{-s} Y_l^m(\vartheta, \varphi), \tag{3a}$$

$$b_{l+1-p,lm} = \frac{2^p l!(2l-p)!}{(l-p)!(2l)!p!} \frac{d^p}{dv^p} B_{lm}(v). \tag{5a}$$

При обычном подходе прямую и обратную волну можно описывать одновременно. Если же искать решение в виде ряда (3), то только при некоторой частной форме коэффициентов $B_{lm}(v)$ ряд (3а) можно представить в виде (3) (со сходящимися коэффициентами). Это значит, что только узкий класс обратных волн можно описывать при помощи рядов (3). К таковым, например, относятся обратные волны с мультипольной структурой $B_{lm}(v) = (-v)^{-n}$, $n > 0$. Подставляя последнее значение $B_{lm}(v)$ в (5а), (3а) и заменяя v на $-u - 2r$, имеем

$$\psi = \sum_{p=0}^{l} \frac{2^p(2l-p)!l!(n+p-1)!}{p!(2l)!(l-p)!(n-1)!r^{l+1-p}} \frac{1}{(u+2r)^{n+p}} Y_l^m(\vartheta, \varphi). \tag{6}$$

Разлагая $(u+2r)^{-k} = (2r)^{-k}\left(1+\dfrac{u}{2r}\right)^{-k}$ в ряд по степеням $u/2r$, можно для ψ при $u < 2r$ действительно получить ряд вида (3)

$$\psi(-u-2r, r, \vartheta, \varphi) = \sum_{s=l+n+1}^{\infty} a_{slm}(u)\, r^{-s} Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

где $a_{slm} \sim u^{s-l-n-1}$. Коэффициенты a_{slm} можно получить также непосредственно из рекуррентных уравнений (4), положив в них только одну постоянную интегрирования отличной от нуля,

$$a_{l+n+1,lm} = \sum_{p=0}^{l} \frac{l!\,(2l-p)!\,(n+p-1)!}{2^n p!\,(l-p)!\,(2l)!\,(n-1)!}.$$

Данный пример проясняет также физическое значение постоянных интегрирования в интегралах уравнений (4) при $s > l+1$: они порождают обратные волны с мультипольной структурой $B_{lm} \sim (-v)^{-n}$. Резюмируя, можем сказать,что рекуррентная система (4) для коэффициентов a_{slm} распадается фактически на две независимые подсистемы, которые описывают различные явления (см. также И. Пийр [9]).

1) Первая подсистема описывает прямые волны, порожденные функцией информации $a_{1lm}(u)$, и решения, определяемые начальными значениями $a_{slm}(u_0)$, $2 \leqslant s \leqslant l+1$. Эти решения можно задать и значениями коэффициентов A_{lm} в выражении (5).

2) Вторая подсистема описывает обратные волны, определяемые начальными значениями $a_{slm}(u_0)$, $s \geqslant l+2$.

Отметим, что $a_{slm} = \text{const}$, $2 \leqslant s \leqslant l+1$, дают неизлучательные нестатические решения. Поскольку изучением этих решений в случае электромагнитного и гравитационного излучений занимался А. Папапетру с сотрудниками [11–13], на них в данной работе мы останавливаться не будем.

3. Скалярное волновое уравнение во втором приближении

Скалярное волновое уравнение в случае метрики (1) имеет вид

$$\frac{2}{r}(r\dot{\varphi})_{,r} - \Delta\varphi = -\frac{2m}{r^2}(r\varphi_{,r})_{,r}. \tag{7}$$

Отсюда получаем во втором приближении

$$\frac{2}{r}(r\underset{2}{\dot{\varphi}})_{,r} - \Delta\underset{2}{\varphi} = -\frac{2m}{r^2}(r\underset{1}{\varphi}_{,r})_{,r}. \tag{8}$$

Если в уравнение (8) подставить ряд (3), то имеем

$$2s\underset{2}{\dot{a}}_{s+1,lm} = (l+s)(l-s+1)\underset{2}{a}_{slm} + 2m(s-1)^2\underset{1}{a}_{s-1,lm}. \tag{9}$$

Уравнения (8) и (9) — линейные уравнения, и вклад каждого $\underset{1}{a}_{slm}$ можно вычислить отдельно. Вклад коэффициентов $\underset{1}{a}_{slm}$ при $s < l$ можно найти, вставляя их в систему (9). Это дает новые прямые волны. Иной характер имеют в рекуррентных уравнениях (9) коэффициенты $\underset{1}{a}_{s-1,lm}$ при $s = l+1$ и $s = l+2$. Они порождают бесконечный ряд рекуррентных уравнений для $\underset{2}{a}_{slm}$, которые, как мы далее увидим, описывают обратные волны. Физически это означает, что прямые волны порождают обратные волны, происходит отражение волн на кривизне пространства-времени. В дальнейшем нас интересует только эта связь прямых и обратных волн. Интегрирование бесконечного ряда рекуррентных уравнений (9) и суммирование соответствующего бесконечного ряда проведено в работе И. Пийра [9]. Ниже найдем эти интегралы без вычисления промежуточных бесконечных рядов.

Проинтегрируем сначала волновое уравнение с неоднородным членом более общего типа $H=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_{nlm}(u)\, r^{-n-l-2}Y_l^m(\vartheta,\varphi)$. Вследствие линейности уравнения достаточно рассмотреть в H только одно слагаемое. Пусть

$$\frac{2}{r}(r\dot{\varphi})_{,r}-\Delta\varphi=\frac{h_{lm}(u)}{r^{l+2+n}}\,Y_l^m(\vartheta,\varphi), \tag{10}$$

где $h_{lm}(u)$ — заданная функция, а n — положительное натуральное число. Рассмотрим, как из частного решения однородного волнового уравнения получить решение уравнения (10). Частное решение однородного уравнения (10) можно записать в виде (3а), (5а), положив там

$$B_{lm}=(-v-\xi)^{-n}=(u+2r-\xi)^{-n},$$

где ξ — параметр. Мультипольные моменты B_{lm} можно взять также в виде линейной суперпозиции приведенных выше мультипольных моментов

$$B_{lm}=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{C_{lm}(\xi)}{(u+2r-\xi)^n}\,d\xi,$$

где τ — не зависящий от координат параметр. Решение однородного волнового уравнения можно теперь записать в виде (3а), где

$$b_{l+1-p,lm}=\frac{l!\,(2l-p)!\,(-1)^p}{(2l)!\,(l-p)!\,p!}\frac{d^p}{dr^p}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{C_{lm}(\xi)}{(u+2r-\xi)^n}\,d\xi. \tag{11}$$

Здесь мы учли, что в рассматриваемом случае $\dfrac{d}{dv}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dr}$. Из решения (11) однородного уравнения легко получить решение неоднородного уравнения, заменяя в пределе интегрирования параметр τ на координату u и выбирая подходящие значения для C_{lm}. Пусть

$$b_{l+1-p,lm}=\frac{l!\,(2l-p)!\,(-1)^p}{(2l)!\,(l-p)!\,p!}\frac{d^p}{dr^p}\int\limits_{u_0}^{u}\frac{C_{lm}(\xi)}{(u+2r-\xi)^n}\,d\xi. \tag{12}$$

Подставим соответствующий ряд (3а) в уравнение (10). Этот ряд будет решением уравнения (10) в том и только в том случае, если те члены, в которых встречается дифференцирование по пределу интегрирования u, будут равняться членам в правой части уравнения (10). Из этого условия получаем

$$C_{lm}(u)=-\frac{2^{n-1}(l+n-1)!\,(2l)!}{l!\,(2l+n)!}\,h_{lm}(u). \tag{13}$$

Здесь мы пользовались также соотношением

$$\sum_{p=0}^{l}\frac{(2l-p)!\,(n+p-1)!}{(l-p)!\,p!\,(n-1)!}=\frac{(2l+n)!}{(l+n)!}.$$

В дальнейшем соотношения (13) понадобятся только при $n=1,2$. Если $n=1,2$, то

$$C_{lm}=-\frac{1}{2l+1}\,h_{lm}(u). \tag{13а}$$

Проинтегрируем уравнения (8) и найдем ту часть $\underset{2}{\varphi}$, которая описывает обратные волны. Будем обозначать ее через ψ. Из (9) следует, что для нахождения ψ нужно учитывать в $\underset{1}{\varphi}$ только два последних члена, остальные члены порождают прямые волны. Пусть

$$\underset{1}{\varphi} = \left(\ldots + \frac{\dot{A}_{lm}(u)}{r^l} + \frac{A_{lm}(u)}{r^{l+1}} \right) Y_l^m(\vartheta, \varphi). \tag{14}$$

Физически представляет интерес случай, когда источник излучает в течение конечного промежутка времени, т. е. $\dot{A}_{lm}(u) \not\equiv 0$ только при $u_0 < u < u_1$. Рассмотрим этот случай. Найдем сначала статическое решение уравнения (8) при $u < u_0$. Тогда $A_{lm}(u) = A_{lm}(u_0) \equiv \mathrm{const}$, $\dot{a}_{slm} = 0$ и уравнение (9) дает

$$\begin{aligned} \underset{2}{a}_{l+2,lm} &= m(l+1) A_{lm}(u_0), \\ \underset{2}{a}_{slm} &= 0, \qquad s \neq l+2. \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнение для ψ при $u > u_0$ получим, если подставим выражения (14) и (15) в уравнение (8)

$$\frac{2}{r}(r\dot{\psi})_{,r} - \Delta\psi = -\frac{2m}{r^2}\left[\frac{l^2 \dot{A}_{lm}(u)}{r^{l+1}} + \frac{(l+1)^2 \delta A_{lm}(u)}{r^{l+2}} \right] Y_l^m, \tag{16}$$

где $\delta A_{lm} \equiv A_{lm}(u) - A_{lm}(u_0)$. В последнем уравнении вклад от $A_{lm}(u_0)$ не учитывается, он учтен в выражении (15). Поэтому вместо $A_{lm}(u)$ имеем в уравнении (16) $\delta A_{lm}(u)$. Отметим также, что $\dot{A}_{lm} = \delta\dot{A}_{lm}$.

Уравнение (16) принадлежит к уравнениям типа (10), и на основании выражений (12), (13а) и (3а) можем написать обратную волну ψ, порожденную прямой волной $\underset{1}{\varphi}$, в виде

$$\psi = \sum_{s=1}^{l+2} b_{slm} r^{-s} Y_l^m(\vartheta, \varphi), \tag{17}$$

$$\begin{gathered} b_{l+2,lm} = \frac{ml^2}{l+1}\,\delta A_{lm}(u), \\ b_{l+1-p,lm} = 2m \frac{l!\,(2l-p)!\,(-1)^p}{(2l)!\,(l-p)!\,p!} \frac{d^p}{dr^p} \int\limits_{u_0}^{u} \frac{\delta A_{lm}(\xi)}{(u+2r-\xi)^2}\, d\xi, \\ p = 0, \ldots, l. \end{gathered} \tag{18}$$

Отметим, что ψ описывает чистую обратную волну только в случае $\delta A_{lm}(u > u_1) = 0$. Тогда $b_{l+2,lm}(u > u_1) = 0$, а в выражениях $b_{l+1-p,lm}(u > u_1)$ верхний предел интегрирования можно заменить постоянной u_1. Соответствующее решение получим в виде ряда (3а), (5а) со значениями мультипольных моментов

$$B_{lm} = 2m \int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{\delta A_{lm}(\xi)}{(u+2r-\xi)^2}\, d\xi. \tag{19}$$

В следующем параграфе рассмотрим только этот случай.

Если B_{lm} действительно можно связать с мультипольной структурой обратной волны, то в точной теории в правой части равенства (19) аргументом должен быть

$$\tilde{v} = -u - 2r - 4m \ln r + O(m^2), \tag{20}$$

потому что изотропная геодезическая, вдоль которой распространяется обратная волна, определена уравнениями $\tilde{v} = \mathrm{const}$, $\vartheta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$. Во втором приближении достаточно учесть первое приближение аргумента $\tilde{v}$ и можно взять мультипольные моменты B_{lm} в виде (19). Но если теми же мультипольными моментами пользоваться и в третьем приближении, то там должны появиться поправки логарифмического типа. В следующем параграфе покажем, что это действительно имеет место.

4. О поправках третьего порядка к скалярным волнам

Волновое уравнение (2) для третьего приближения имеет следующий вид:

$$\frac{2}{r} (r\dot{\underset{3}{\varphi}})_{,r} - \Delta \underset{3}{\varphi} = -\frac{2m}{r^2} (r\underset{2}{\varphi}_{,r})_{,r}. \tag{21}$$

Здесь $\underset{2}{\varphi}$ — заданная, а $\underset{3}{\varphi}$ — искомая функции. Далее будем учитывать только ту часть $\underset{2}{\varphi}$, которая описывает обратные волны. Остальная часть решения может быть найдена по схеме, изложенной в предыдущем параграфе. Заменим в правой части уравнения (21) $\underset{2}{\varphi}$ на ψ, которая описывает чистую обратную волну, т. е. дана в виде ряда (3а), (5а) с мультипольными моментами (19), и перейдем от u к аргументу $v = -u - 2r$. Обозначая производные по v штрихом, имеем

$$\frac{2}{r} (r\underset{3}{\varphi}')_{,r} - \Delta \underset{3}{\varphi} = -\frac{2m}{r^2} [r(\psi_{,r} - 2\psi')]_{,r} + \frac{4m}{r} (\psi_{,r} - 2\psi')'. \tag{22}$$

По сравнению с уравнением второго приближения (8) в правой части уравнения (22) появляются добавочные члены

$$4m \left(-\frac{2}{r} \psi'' + \frac{2}{r} \psi'_{,r} + \frac{1}{r^2} \psi' \right).$$

Если в уравнение (22) подставить ψ в виде ряда (3а), то вклад от этих членов определен уравнением

$$\Box \Phi = [-8mb''_{1lm} r^{-2} - 8m \sum_{s=2}^{l+1} b''_{slm} r^{-s-1} - 4m \sum_{s=1}^{l+1} (2s-1) b'_{slm} r^{-s-2}] Y_l^m. \tag{23}$$

Так как здесь в правой части имеется член, пропорциональный r^{-2}, то решение этого уравнения невозможно записать в виде ряда (3а). Нетрудно убедиться, что решение уравнения (23) следующее:

$$\Phi = -4m \sum_{s=1}^{l+1} b'_{slm}(v) r^{-s} \ln r Y_l^m (\vartheta, \varphi). \tag{24}$$

Остальную часть $\underset{3}{\varphi}$ можно выписать в полной аналогии с результатами предыдущего параграфа.

Дадим интерпретацию выражения (24). Сложим ряды (17) и (24)

$$\psi + \Phi = \sum_{s=1}^{l+1} [b_{slm}(v) - 4m \ln r b'_{slm}(v)] r^{-s} Y_l^m.$$

Учитывая соотношение (20), имеем в рассматриваемом приближении

$$b_{slm}(v) - 4m \ln r b'_{slm}(v) \approx b_{slm}(\tilde{v}). \tag{25}$$

Этим мы показали, что члены логарифмического типа дают действительно поправку к уравнению геодезической, вдоль которой распространяется обратная волна.

Далее покажем, что решения уравнений электромагнитного и гравитационного полей в первом приближении также определены решением волнового уравнения скалярного поля, а поправки более высокого порядка дают такую же отраженную волну, которую мы получили в случае скалярного поля.

5. Волновое уравнение для электромагнитного и гравитационного излучений в поле Шварцшильда

Воспользуемся записью уравнений Максвелла и тождеств Бианки в локальном квазиортогональном репере* $(l^\mu, k^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu)$. Выберем репер так, что l^μ является касательным вектором к изотропной геодезической $u = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, а m^μ — касательным вектором к сфере $r = \text{const}$, $u = \text{const}$. В поле Шварцшильда эти условия удовлетворены, например, при следующем выборе репера:

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0),$$

$$k^\mu = \left(1, -\frac{1}{2} + \frac{m}{r}, 0, 0\right), \tag{26}$$

$$m^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}} \left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\vartheta}\right).$$

Следуя Э. Ньюмэну и Р. Пенроузу [14], введем спинор электромагнитного поля

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu k^\nu + \overline{m}^\mu m^\nu),$$
$$\Phi_2 = F_{\mu\nu} \overline{m}^\mu k^\nu, \tag{27}$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля. Уравнения Максвелла для спинора $\Phi_A(u, r, \vartheta, \varphi)$ записываются следующим образом:

$$\Phi_{1,r} + \frac{2}{r} \Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\, r} \eth_{-1} \Phi_0, \tag{28а}$$

$$\Phi_{2,r} + \frac{1}{r} \Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\, r} \eth_0 \Phi_1, \tag{28б}$$

$$\dot{\Phi}_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r}\right) \Phi_{0,r} + \frac{1}{2r} \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}\, r} \tilde{\eth}_0 \Phi_1, \tag{28в}$$

* Черта над символом означает комплексное сопряжение.

$$\dot{\Phi}_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r}\right)\Phi_{1,r} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\tilde{\eth}_1\Phi_2. \qquad (28г)$$

Здесь использованы дифференциальные операторы

$$\eth_n \equiv \sin^n\vartheta\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^{-n}\vartheta,$$

$$\tilde{\eth}_n \equiv \sin^{-n}\vartheta\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin^{n}\vartheta.$$

Два первых уравнения (28) связывают производные от Φ_A на гиперповерхности $u = \mathrm{const}$, два последних уравнения определяют изменение Φ_A в направлении u. Первую пару уравнений называют соответственно уравнениями гиперповерхности, вторую пару — уравнениями распространения. Фактически одно из уравнений (28) является следствием других, и достаточно рассмотреть два уравнения гиперповерхности и одно уравнение распространения.

Сведем интегрирование системы уравнений (28) к интегрированию скалярного волнового уравнения. Для этого умножим уравнение (28г) на r^2, продифференцируем полученное уравнение по r и на основании уравнения (28б) заменим $(r\Phi_2)_{,r}$ на $1/\sqrt{2}\eth_0\Phi_1$. Обозначая $\varphi = r\Phi_1$, имеем ($\tilde{\eth}_1\eth_0$ — оператор Лапласа на сфере)

$$\frac{2}{r}(r\dot{\varphi})_{,r} - \Delta\varphi = -\frac{2m}{r^2}\left[(r\varphi_{,r})_{,r} - \frac{1}{r}\varphi\right]. \qquad (29)$$

Покажем, что такого же типа уравнение можно вывести для гравитационного поля. Следуя Э. Ньюмэну и Р. Пенроузу [14], определим величины Ψ_A:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -C_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta,\\
\Psi_1 &= -C_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha k^\beta l^\gamma m^\delta,\\
\Psi_2 &= -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta\gamma\delta}(l^\alpha k^\beta l^\gamma k^\delta - l^\alpha k^\beta m^\gamma \overline{m}^\delta),\\
\Psi_3 &= C_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\alpha k^\beta k^\gamma \overline{m}^\delta,\\
\Psi_4 &= -C_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\alpha \overline{m}^\beta k^\gamma \overline{m}^\delta.
\end{aligned} \qquad (30)$$

Здесь $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля, который в пустом пространстве-времени совпадает с тензором Римана—Кристоффеля. Из тождеств Бианки получим следующую систему уравнений для Ψ_A (встречающиеся здесь коэффициенты вращения σ, τ, μ, ν, λ и компоненты репера m^2, k^2 выражаются также через Ψ_A):

$$\dot{\Psi}_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r}\right)\Psi_{0,r} + \left(\frac{m}{r^2} + \frac{1}{2r}\right)\Psi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\tilde{\eth}_{-1}\Psi_1 - \frac{3m}{r^3}\sigma, \qquad (31а)$$

$$\dot{\Psi}_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r}\right)\Psi_{1,r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{r^2}\right)\Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\tilde{\eth}_0\Psi_2 + \frac{3m}{r^3}\tau + \frac{3m}{r^4}m^2, \qquad (31б)$$

$$\dot{\Psi}_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r}\right)\Psi_{2,r} + \left(\frac{3}{2r} - \frac{3m}{r^2}\right)\Psi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\tilde{\eth}_1\Psi_3 + \frac{3m}{r^3}\mu - \frac{3m}{r^4}k^2, \tag{31в}$$

$$\dot{\Psi}_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{r}\right)\Psi_{3,r} + \left(\frac{2}{r} - \frac{5m}{r^2}\right)\Psi_3 + \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\tilde{\eth}_2\Psi_4 - \frac{3m}{r^3}\nu, \tag{31г}$$

$$\Psi_{1,r} + \frac{4}{r}\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\eth_{-2}\Psi_0, \tag{31д}$$

$$\Psi_{2,r} + \frac{3}{r}\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\eth_{-1}\Psi_1, \tag{31е}$$

$$\Psi_{3,r} + \frac{2}{r}\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\eth_0\Psi_2 + \frac{3m}{r^4}\overline{m}^2, \tag{31ж}$$

$$\Psi_{4,r} + \frac{1}{r}\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\eth_1\Psi_3 + \frac{3m}{r^3}\lambda. \tag{31з}$$

Уравнения (31а)—(31г) определяют изменение Ψ_A в направлении u, их называют уравнениями распространения. Уравнения (31д)—(31з) связывают производные от Ψ_A на гиперповерхности $u = \text{const}$, их называют уравнениями гиперповерхности. Уравнения для $\varphi = r^2\Psi_2$ получим при умножении уравнения (31в) на r^3, дифференцировании по r и подстановке $(r^2\Psi_3)_{,r}$ из уравнения (31ж)

$$\frac{2}{r}(r\dot{\varphi})_{,r} - \Delta\varphi = -\frac{2m}{r^2}\left[(r\varphi_{,r})_{,r} - \frac{4}{r}\varphi\right] - \frac{6ma_1^{+}}{r^4}. \tag{32}$$

Мы показали, что скалярные уравнения (29) и (32) соответственно для электромагнитного и гравитационного полей отличаются от уравнения скалярного поля (7) только слагаемыми, пропорциональными m в правой части равенства. Следовательно, в плоском пространстве-времени решения уравнений (29) и (32) можно взять в виде (3), (5) или (3а), (5а), а в поле Шварцшильда к решению уравнения (7) надо добавить еще вклад от члена $\frac{2m}{r^3}\varphi$, т. е. решение неоднородного волнового уравнения

$$\Box\chi = \frac{2m}{r^3}\varphi. \tag{32а}$$

Проинтегрируем последнее уравнение во втором приближении. Пусть $\underset{1}{\varphi}$ имеет вид (3). Найдем, более точно, вклад в $\underset{2}{\chi}$ от двух последних членов в разложении $\underset{1}{\varphi}$ по r^{-s}. Вклад в решение $\underset{2}{\chi}$ от остальных коэффициентов разложения $\underset{1}{\varphi}$ определяется из рекуррентных уравнений типа (9) — они дают только прямые волны. Подставляя $\underset{1}{\varphi} = [\dot{A}_{lm}(u)r^{-l} + A_{lm}(u)r^{-l-1}]Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ в уравнение (32а), имеем

$$\underset{2}{\chi} = -m\frac{A_{lm}(u)}{l+1}r^{-l-2}Y_l^m(\vartheta,\varphi).$$

Видим, что добавочный член $2mr^{-3}\underset{1}{\varphi}$ в уравнении (29) порождает во втором приближении только прямые волны. Такое же следствие вытекает для двух последних членов в уравнении (32), где

$$a_1^+ \equiv \sum_{lm}(a_{1lm}+(-1)^m\bar{a}_{1,l,-m})\,Y_l^m.$$

Далее предположим, что в решении волнового уравнения обычная шаровая функция $Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ заменена на $Y^l_{0m} \equiv \sqrt{\dfrac{4\pi}{2l+1}}\,Y_l^m$. Будем пользоваться также шаровыми функциями со спином n. Эти функции просто связаны с матричными элементами T^l_{nm} представлений трехмерных вращений пространства (определение T^l_{nm} дано в монографии [15])

$$Y^l_{nm}(\vartheta,\varphi) \equiv T^l_{nm}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\vartheta,0\right).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства Y^l_{nm}:

$$\eth_n Y^l_{nm} = -i\sqrt{(l-n)(l+n+1)}\,Y^l_{n+1,m},$$
$$\tilde{\eth}_n Y^l_{nm} = -i\sqrt{(l+n)(l-n+1)}\,Y^l_{n-1,m}.$$

Найдем остальные компоненты Φ_A, Ψ_A. Если функция φ описывает прямую волну, т. е. дана в виде ряда (3), тогда из уравнений гиперповерхности (28а), (28б) и (31д)—(31з) легко вычислить искомые выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_0 &= -\sqrt{2}i\sum_{s=1}^{l+1}\frac{s-1}{\sqrt{l(l+1)}}a_{slm}(u)\,r^{-s-1}Y^l_{-1,m}(\vartheta,\varphi),\\
\Phi_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{l+1}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{s}a_{slm}(u)\,r^{-s-1}Y^l_{1m}(\vartheta,\varphi)+\\
&\quad+\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\dot{a}_{1lm}r^{-1}Y^l_{1m}(\vartheta,\varphi);
\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

$$\Psi_0 = -\frac{2}{\sqrt{(l-1)\,l(l+1)(l+2)}}\sum_{s=1}^{l+1}\frac{(s-1)(s-2)}{r^{s+2}}a_{slm}(u)\,Y^l_{-2,m},$$

$$\Psi_1 = -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\sum_{s=1}^{l+1}\frac{s-1}{r^{s+2}}a_{slm}(u)\,Y^l_{-1,m},$$

$$\Psi_3 = \left[\frac{i\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{l+1}\frac{1}{sr^{s+2}}a_{slm}(u)+\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\dot{a}_{1lm}(u)\,r^{-2}\right]Y^l_{1m},\qquad(34)$$

$$\Psi_4 = \Bigg[-\frac{1}{2}\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}\sum_{s=1}^{l+1}\frac{1}{s(s+1)r^{s+2}}a_{slm}(u) + \frac{2\ddot{a}_{1lm}(u)}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}}r^{-1} - \frac{[l(l+1)-2]\dot{a}_{1lm}(u)}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}}r^{-2}\Bigg] Y^l_{2m}.$$

Коэффициент при r^{-1} в Φ_2 найден непосредственно из уравнения (28г). Коэффициенты при r^{-1}, r^{-2} в Ψ_3, Ψ_4 найдены из уравнений (31в) и (31г). Отметим, что так как уравнения гиперповерхности (28а), (28б) не содержат членов, в которые в качестве множителя входит m, то выражения (33) верны в любом приближении, а выражения (34) справедливы только в первом приближении.

Некоторые осложнения возникают при рассмотрении обратных волн, т. е. в случае, когда φ дана в виде ряда (3а), (5а), потому что тогда при интегрировании и дифференцировании по r нужно учитывать то обстоятельство, что коэффициенты $b_{slm}(v)$ также зависят от r. Но если воспользуемся свойствами симметрии уравнений (28), (31) в отношении замены переменных $\tilde{v} = -u - 2r - 4m\ln(r-2m)$ и u, то можем для обратных волн найти формулы, аналогичные формулам (33), (34). Займемся этой проблемой.

6. Симметрия уравнений Максвелла и тождеств Бианки

Линейный элемент Шварцшильда (1) инвариантен относительно замены переменных

$$\begin{gathered}\tilde{v} = -u - 2r - 4m\ln(r-2m),\\ \tilde{r} = r,\quad \tilde{\vartheta} = \vartheta,\quad \tilde{\varphi} = \varphi.\end{gathered} \tag{35}$$

Геометрически эта замена означает, что вместо конгруэнции изотропных геодезических $u = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ мы можем выбрать в качестве координатных линий другую конгруэнцию изотропных геодезических $\tilde{v} = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$.

Введем в координатах (35) аналогично реперу (26) локальный квазиортогональный репер $(\tilde{l}^\mu, \tilde{k}^\mu, \tilde{m}^\mu, \bar{\tilde{m}}^\mu)$, приближенный вид которого следующий **:

$$\begin{aligned}\tilde{l}^\mu &= (0, 1, 0, 0),\\ \tilde{k}^\mu &= \left(1, -\frac{1}{2} + \frac{m}{\tilde{r}}, 0, 0\right),\\ \tilde{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\,\tilde{r}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\tilde{\vartheta}}\right).\end{aligned} \tag{36}$$

Определим в локальном репере спиноры электромагнитного и гравитационного полей $\tilde{\Phi}_A(\tilde{v}, \tilde{r}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$, $\tilde{\Psi}_A$ $(\tilde{v}, \tilde{r}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$ по тем же формулам (27), (30), по которым мы определяли $\Phi_A(u, r, \vartheta, \varphi)$ и $\Psi_A(u, r, \vartheta, \varphi)$. Легко убедиться, что для $\tilde{\Phi}_A(\tilde{v})$ и $\tilde{\Psi}_A(\tilde{v})$ получаем

** В этом репере не учтен вклад гравитационного излучения. Но для перенесения формул (34) на случай обратных гравитационных волн второго приближения достаточно взять (36) при $m = 0$. Ниже мы все же учтем в (36) все степени m. Это дает правильные формулы преобразования в любом приближении для всех Ψ_A, кроме Ψ_2. При разработке высших приближений приходится тогда уточнять формулы преобразования (39) только для Ψ_2. Формулы преобразования для спиноров электромагнитного поля справедливы для любых степеней m.

точно такие же уравнения, которые мы получили для $\Phi_A(u)$ и $\Psi_A(u)$. Следовательно, все формулы предыдущего параграфа справедливы и для $\tilde\Phi_A(\tilde v)$, $\tilde\Psi_A(\tilde v)$. Остается найти еще связь между Φ_A и $\tilde\Phi_A$, а также между Ψ_A и $\tilde\Psi_A$. Спиноры $\tilde\Phi_A$ и $\tilde\Psi_A$ получаем, если в определениях (27) и (30) репер (26) заменить на репер (36). Следовательно, для нахождения искомой связи нужно найти преобразование, которое переводит репер (26) в репер (36). Можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \tilde l^\mu &= -2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} k^\mu, \\ \tilde k^\mu &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right) l^\mu, \qquad (37) \\ \tilde m^\mu &= m^\mu. \end{aligned}$$

Видим, что репер (36) можно получить из репера (26), если k^μ заменить на $-\frac{1}{2}\tilde l^\mu$ и l^μ заменить на $-2\tilde k^\mu$ и осуществить времениподобное вращение с множителем $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$ (о времениподобных вращениях см. Р. Сакс [16]). Из соотношений (37), определений (27), (30) и аналогичных определений для $\tilde\Phi_A(\tilde v)$ и $\tilde\Psi_A(\tilde v)$ следуют формулы:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\tilde v) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{m}{r}\right)\bar{\tilde\Phi}_0(\tilde v), \\ \Phi_0(\tilde v) &= 2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\bar{\tilde\Phi}_2(\tilde v), \qquad (38) \\ \Phi_1(\tilde v) &= -\bar{\tilde\Phi}_1(\tilde v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\tilde v) &= 4\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-2}\bar{\tilde\Psi}_4(\tilde v), \\ \Psi_1(\tilde v) &= -2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\bar{\tilde\Psi}_3(\tilde v), \\ \Psi_2(\tilde v) &= \bar{\tilde\Psi}_2(\tilde v), \qquad (39) \\ \Psi_3(\tilde v) &= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\bar{\tilde\Psi}_1(\tilde v), \\ \Psi_4(\tilde v) &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{2}\bar{\tilde\Psi}_0(\tilde v). \end{aligned}$$

Подытожим сказанное выше. Мы проинтегрировали волновое уравнение для *** φ. Пусть во втором приближении $\underset{n}{\varphi} = F(u) + G(\tilde v)$. На ос-

---

*** Связь $\underset{1}{\varphi}$ с мультипольной структурой источников электромагнитного поля найдена в работе П. Керес [17]. Связь $\underset{1}{\varphi}$ с источниками гравитационного поля будем рассматривать в одной из наших последующих работ.

новании определений $\varphi \equiv r\Phi_1$, $\varphi \equiv r^2\Psi_2$ и формул (38) и (39) можем взять $\Phi_1(u) = r^{-1}F(u)$, $\tilde{\Phi}_1(\tilde{v}) = -r^{-1}\overline{G}(\tilde{v})$ или $\Psi_2(u) = r^{-2}F(u)$, $\tilde{\Psi}_2(\tilde{v}) = r^{-2}\overline{G}(\tilde{v})$. Формулы (33) и (34) позволяют теперь выписать выражения для остальных $\Phi_A(u)$ и $\Psi_A(u)$. Эти же формулы применимы для записи всех $\tilde{\Phi}_A(\tilde{v})$ или $\tilde{\Psi}_A(\tilde{v})$, когда $\tilde{\Phi}_1(\tilde{v})$ или $\tilde{\Psi}_2(\tilde{v})$ даны. Затем с помощью выражений (38) и (39) можем перейти от новых спиноров $\tilde{\Phi}_A$, $\tilde{\Psi}_A$ к старым и выписать полное решение уравнений в виде суммы прямых и обратных волн. Видим, что вся задача интегрирования уравнений Максвелла и линеаризованных тождеств Бианки в поле Шварцшильда сведена к интегрированию скалярного волнового уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bondi H., van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., **A269**, 21 (1962).
2. Kundt W., Newman E., J. Math. Phys., **9**, 2193 (1968).
3. Newman E., Penrose R., Phys. Rev. Lett., **15**, 231 (1965).
4. Newman E., Penrose R., Proc. Roy. Soc., **A305**, 175 (1968).
5. Bonnor W. B., Rotenberg M. A., Proc. Roy. Soc., **A289**, 247 (1966).
6. Hunter A. J., Rotenberg M. A., J. Phys., **A2**, 34 (1969).
7. Couch W. E., Torrence R. J., Janis A. I., Newman E. T., J. Math. Phys., **9**, 484 (1968).
8. Bazanski S. L., Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, **17**, 205 (1968).
9. Пийр И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 253 (1971).
10. Манкин Р., Пийр И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 413 (1971).
11. Papapetrou A., J. Math. Phys., **6**, 1405 (1965).
12. Moret-Bailly I., Papapetrou A., Ann. Inst. H. Poincaré, **6**, 205 (1967).
13. Moret-Bailly I., Ann. Inst. H. Poincaré, **9**, 395 (1968).
14. Newman E., Penrose R., J. Math. Phys., **3**, 566 (1962).
15. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958.
16. Сакс Р., В сб.: Гравитация и топология, М., 1966.
17. Керес П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 264 (1971).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/IV 1971

V. UNT, PIRET KERES

«LAINESABADEST» SCHWARZSCHILDI VÄLJAS

Artiklis uuritakse lainete hajumist aegruumi kõverusel Schwarzschildi väljas, kasutades järkjärgulise lähendamise meetodit. Piirdutakse kolmanda lähendiga. Elektromagnetilise ja gravitatsioonikiirguse uurimine taandati skalaarse lainevõrrandi uurimisele.

V. UNT, PIRET KERES

"TAILS" OF THE WAVES IN THE SCHWARZSCHILD FIELD

In this paper the waves in the Schwarzschild field are considered. The scattering of the waves on the curvature of space-time is investigated. Pertubation method is used and calculations are carried out to the third order. The integration of electromagnetic and gravitational radiation is reduced to the integration of the scalar wave equation.