EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.1.02

УДК 512.25/26+519.3 : 330.115

Э. РАЙК

КАЧЕСТВЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Рассмотрим проблемы, связанные с задачами стохастического нелинейного программирования, где функции минимизации имеют вид $Ef(x, \xi)$ или $P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$, а ограничения даются в виде $Eg(x, \eta) \leqslant 0$ или $P[g(x, \eta) \leqslant 0] \geqslant \alpha$. Заметим, что в этих задачах после взятия математического ожидания или вычисления вероятности, зависимость от случайного вектора ξ исчезнет и стохастическая задача превращается в детерминированную задачу нелинейного программирования, формулировка которой имеет следующий вид.

Требуется минимизировать функцию $f(x)$ на множестве $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$, определенном условиями $Q_i = \{x : g_i(x) \leqslant 0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Выясним, какие условия нужно накладывать на функции минимизации и ограничения для обеспечения существования и единственности решения, а также для необходимых и достаточных условий в виде Куна—Таккера. Для этого приведем основные известные результаты для детерминированной задачи.

Теорема 1. *Полунепрерывная снизу функция достигает своего минимума на замкнутом ограниченном множестве.*

Теорема 2. *Выпуклая функция на выпуклом множестве не может достигнуть локального минимума (может достигнуть лишь глобального минимума).*

Теорема 3. *Если строго выпуклая функция достигает минимума на выпуклом множестве, то этот минимум единственный (т. е. достигается в единственной точке).*

Теорема 4. *Если выпуклая функция достигает минимума на строго выпуклом множестве и если вне этого множества имеется точка, где значение минимизируемой функции меньше, чем в точке минимума на множестве, то минимум единственный.*

Теорема 5. *Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ достигает своего минимума в задаче дифференцируемыми ограничениями $g_i(x)$ в точке x^*. Тогда существуют такие числа $\lambda_i \geqslant 0$, что производные связаны равенством*

$$f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g'_i(x^*) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Теорема 6. *Пусть функции $f(x)$ и $g_i(x)$ выпуклы и пересечение $Q_1 \cap \bigcap\limits_{i=2}^{m} Q_i^0 \neq \varnothing$ (где Q_i^0 означает множество внутренних точек Q_i). Если* *в некоторой точке $x^* \in Q$ выполнены условия $f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g'_i(x^*) = 0$, $\lambda_i g_i(x^*) = 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то точка x^* является точкой минимума. (Здесь через $f'(x^*)$ и $g'_i(x^*)$ обозначены векторы опорных функций к выпуклым функциям $f(x)$ и $g_i(x)$ в точке x^*).*

Дополним эти теоремы следующими полезными утверждениями:

если $g_i(x)$ — полунепрерывная снизу функция, то множество $Q_i = \{x : g_i(x) \leqslant 0\}$ замкнуто;

пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;

если $g_i(x)$ — квазивыпуклая (строго квазивыпуклая) функция, то множество $Q_i = \{x : g_i(x) \leqslant 0\}$ выпукло (строго выпукло);

пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло, а пересечение конечного числа строго выпуклых множеств строго выпукло;

опорная функция для выпуклой дифференцируемой функции задается вектором градиента $f'(x)$.

В задачах стохастического нелинейного программирования можно провести качественное исследование прямым образом, как это частично делается в работах [1, 2]. Однако мы не будем переформулировать теоремы 1—6 для стохастических задач, а установим лишь при каких условиях приведенные функции $u(x) = Ef(x, \xi)$ и $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$ в задачах стохастического программирования удовлетворяют свойствам перечисленных теорем.

2. Полунепрерывность снизу функции $u(x) = Ef(x, \xi)$ можно установить следующими достаточными условиями. Если $f(x, \xi)$ измерима по ξ для любого x и полунепрерывна снизу по x равномерно относительно ξ на любом компактном множестве, а интеграл $Ef(x, \xi)$ равномерно сходится в Q, то $u(x)$ является полунепрерывной снизу (см. приложение). К сожалению, в этом утверждении условие равномерной полунепрерывности трудно проверяемо. Поэтому здесь можно использовать результат теоремы 1 из [3]. Если $f(x, \xi)$ непрерывна по x для почти всех ξ и измерима по ξ для всех $x \in R^m$, а $f(x, \xi) \geqslant a(\xi) - \beta \|x\|^p$, $p \geqslant 1$, $E|a(\xi)| < \infty$, то функция $u(x) = Ef(x, \xi)$ является полунепрерывной снизу.

Полунепрерывность функции $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$ в общем виде доказать трудно. В частном случае, если $f(x, \xi)$ — сепарабельная функция $f(x, \xi) = f_1(x) + f_2(\xi)$ и $f_1(x)$ — непрерывная функция, полунепрерывность сверху $v(x)$ устанавливается сразу.

Проблема непрерывности функции $u(x)$ в большой степени совпадает с проблемой непрерывности интеграла по параметру. В наиболее общем виде эти результаты приведены в работе [4] (в предложениях 3 и 4 на с. 110—111). Можно также использовать теорему 2 из [3], в которой дополнительно к условиям сформулированной там теоремы 1 требуется $|f(x, \xi)| \leqslant a(\xi) + \beta \|x\|^p$, $p \geqslant 1$, $E|a(\xi)| < \infty$.

Непрерывность функции $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$ удается доказать при следующих предположениях: 1) $f(x, \xi)$ — непрерывная функция по (x, ξ); 2) для любого x мера множества $\Gamma N_x = \{\xi : f(x, \xi) = f(x_0, \xi_0)\}$ равна нулю. Доказательство этого факта приведено в приложении.

Ограниченность множеств $Q_1 = \{x : Eg(x, \xi) \leqslant 0\}$ и $Q_2 = \{x : P[g(x, \xi) \leqslant 0] \geqslant \alpha\}$, $\alpha > 0$ имеет место при простых достаточных условиях. Множества Q_1 и Q_2 ограничены, если существует функция $g(x)$ такая, что $g(x, \xi) \geqslant g(x)$ для почти всех ξ и $g(x) > 0$ для любого $\|x\| > R$ или $g(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Производные функции $u(x) = Ef(x, \xi)$ и $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$ можно выписать только при очень сильных предположениях. Для функции $u(x)$ эти условия приведены в работе [4] (предложение 7 на с. 117), а для функции $v(x)$ см. приложение. Но если для функции $u(x)$ производная имеет относительно простой вид $u'(x) = Ef'(x, \xi)$, то для функции $v(x)$ производная $v'(x)$ имеется в виде весьма сложного поверхностного интеграла

$$v'(x) = \int\limits_{S_x} \frac{f'_x(x,\xi)}{\|f'_\xi(x,\xi)\|} p(\xi)\, dS_x(\xi), \tag{1}$$

где

S_x — поверхность $S_x = \{\xi : f(x, \xi) = f(x_0, \xi_0)\}$;
$f'_x(x, \xi)$ — вектор частных производных по x;
$p(\xi)$ — плотность распределения случайной величины ξ;
$dS_x(\xi)$ — элемент площади поверхности S_x.

Для частных случаев формула (1) упрощается. Допустим, например, что случайная величина ξ — двумерная (ξ_1, ξ_2) и функция $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$ представима в виде двукратного интеграла

$$v(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} d\xi_1 \int\limits_{g_3(x,\xi_1)}^{g_4(x,\xi_1)} p(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \varphi(x, \xi_1)\, d\xi_1.$$

В предположении, что функции $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x, \xi_1)$ и $g_4(x, \xi_1)$ дифференцируемы по x, имеем

$$v'(x) = g'_2(x)\varphi(x, g_2(x)) - g'_1(x)\cdot\varphi(x, g_1(x)) + \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \varphi'(x, \xi_1)\, d\xi_1 =$$

$$= g'_2(x)\varphi(x, g_2(x)) - g'_1(x)\cdot\varphi(x, g_1(x)) +$$

$$+ \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} \{[g'_{4x}(x, \xi_1)\cdot p(\xi_1, g_4(x, \xi_1))] - [g'_{3x}(x, \xi_1)\cdot p(\xi_1, g_3(x, \xi_1))]\}\, d\xi_1.$$

Получим сложные формулы, которыми в общем случае пользоваться затруднительно. Только в одном частном случае формула (1) имеет простой вид. Именно для сепарабельной функции $f(x, \xi) = f_1(x) + f_2(\xi)$ производная вычисляется по формуле

$$v'(x) = \lambda(x) f'_1(x), \tag{2}$$

где $\lambda(x)$ — скалярная функция $\lambda(x) \geqslant 0$. $\lambda(x) = 0$, например, тогда, если $p(\xi) = 0$ на поверхности S_x (1). В теоремах 5 и 6, а также в ряде вычислительных методов нас не интересует точный вид производной $v'(x)$, а лишь направление градиента. В этих случаях формула (2) нас вполне устраивает.

В ы п у к л о с т ь функции $u(x) = Ef(x, \xi)$ устанавливается прямым образом при предположении, что функция $f(x, \xi)$ выпукла по x для почти всех ξ. Аналогично, если $f(x, \xi)$ строго выпукла по x для почти всех ξ, то и функция $u(x)$ строго выпукла.

Действительно, по предположению

$$\frac{1}{2} f(x_1, \xi) + \frac{1}{2} f(x_2, \xi) > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \xi\right)$$

для почти всех ξ. Берем математическое ожидание с обеих сторон и получим $\frac{1}{2} u(x_1) + \frac{1}{2} u(x_2) > u\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, т. е. $u(x)$ строго выпукла. Оказывается, однако, что из квазивыпуклости $f(x, \xi)$ по x не следует квазивыпуклость функции $u(x)$. Говорить о выпуклости функции $v(x)$ во всем пространстве, вообще говоря, нельзя, так как функция

$v(x)$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant v(x) \leqslant 1$. Среди выпуклых функций, удовлетворяющих данному неравенству, встречаем только постоянные. Приведем достаточные условия квазивыпуклости функции $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant \gamma = f(x_0, \xi_0)]$. Пусть функция $f(x, \xi)$ сепарабельна $f(x, \xi) = f_1(x) + f_2(\xi)$ и $f_1(x)$ квазивыпукла, тогда и функция $v(x)$ квазивыпукла. Действительно, пусть

$$f_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \max(f_1(x_1), f_1(x_2)),$$

тогда и

$$v\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = P\left[f_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \gamma - f_2(\xi)\right] \leqslant$$

$$\leqslant P[\max(f_1(x_1), f_1(x_2)) \geqslant \gamma - f_2(\xi)] = \max(v(x_1), v(x_2)).$$

Опорная функция для выпуклой функции $u(x)$ определяется формулой $u'(x) = Ef'(x, \xi)$, где $f'(x, \xi)$ измерима по ξ и при фиксированных ξ является опорной к функции $f(x, \xi)$, которая предполагается выпуклой по x, т. е. $f(x + \Delta x, \xi) \geqslant f(x, \xi) + (f'_x(x, \xi), \Delta x)$. Разумеется среди функций $f'_x(x, \xi)$, удовлетворяющих данному неравенству, могут встречаться и неизмеримые.

Приложение

Теорема 7. *Если функция $f(x, \xi)$, определенная на произведении пространств $X \times Y$, измерима по ξ для любого x и полунепрерывна снизу по x равномерно по ξ на любом компактном множестве из Y, а интеграл $Ef(x, \xi) = \int_Y f(x, \xi) dF(\xi)$ равномерно сходится в $Q \subset X$, то $u(x) = Ef(x, \xi)$ является полунепрерывной снизу.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По равномерной сходимости интеграла $\int_Y f(x, \xi) dF(\xi)$ в $Q \subset X$ найдется ограниченное замкнутое множество — компакт $K \subset Y$ такое, что для любого $x \in Q \subset X$

$$\left|\int_Y f(x,\xi) dF(\xi) - \int_K f(x,\xi) dF(\xi)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3}$$

Из равномерной полунепрерывности снизу по x следует, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого y, удовлетворяющего $\|y - x\| \leqslant \delta$,

$$f(y, \xi) \geqslant f(x, \xi) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \xi \in K. \tag{4}$$

Интегрируя неравенство (4), получаем

$$\int_K f(y, \xi) dF(\xi) \geqslant \int_K f(x, \xi) dF(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} \int_K dF(\xi) \geqslant$$

$$\geqslant \int_K f(x, \xi) dF(\xi) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Но тогда по (3) и (5)

$$u(y) = \int_Y f(y, \xi) dF(\xi) \geqslant \int_K f(y, \xi) dF(\xi) - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{K} f(x,\xi)\,dF(\xi)-\frac{3}{4}\varepsilon \geqslant \int\limits_{Y} f(x,\xi)\,dF(\xi)-\varepsilon = u(x)-\varepsilon,$$

т. е. $u(x)$ полунепрерывна снизу.

Теорема 8. *Пусть* 1) *функция* $f(x, \xi)$ *непрерывна по совокупности векторов* (x, ξ) *на произведении пространств* $X \times Y$; 2) *для любого* x *мера множества* $\Gamma N_x = \{\xi : f(x, \xi) = \gamma\}$ *равна нулю, тогда функция* $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant \gamma]$ *(или* $P[f(x, \xi) \leqslant \gamma]$*) является непрерывной.*

Доказательство. Определим множества $N_x = \{\xi : f(x, \xi) \geqslant \gamma\}$ и $N_y = \{\xi : f(y, \xi) \geqslant \gamma\}$, тогда $v(x) = \int\limits_{N_x} dF(\xi)$ и $v(y) = \int\limits_{N_y} dF(\xi)$.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что если $\|x - y\| \leqslant \delta$, то $|v(x) - v(y)| \leqslant \varepsilon$.

Поскольку мера ξ вероятностна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое ограниченное множество $K \subset Y$ такое, что $\int\limits_{Y} dF(\xi) - \int\limits_{K} dF(\xi) \leqslant \varepsilon$. Поэтому без ограничения общности можем предположить, что все множества в дальнейшем равномерно ограничены, в частности N_x и N_y.

Рассмотрим модуль разности

$$|v(x)-v(y)| = \Big|\int\limits_{N_x} dF(\xi) - \int\limits_{N_y} dF(\xi)\Big| \leqslant \int\limits_{N_x \triangle N_y} dF(\xi),$$

где $N_x \triangle N_y = (N_x \backslash N_y) \cup (N_y \backslash N_x)$.
Покажем ниже, что $\int\limits_{N_x \triangle N_y} dF(\xi) \leqslant \varepsilon$, если $\|x - y\| \leqslant \delta$. Для этого построим множество $M_\varepsilon \supset N_x \triangle N_y$, $\int\limits_{M_\varepsilon} dF(\xi) \leqslant \varepsilon$, $M_\varepsilon = \{\xi : \|\xi - \eta\| \leqslant \varepsilon,$ $\eta \in \Gamma N_x\}$, $\Gamma N_x = \{\xi : f(x, \xi) = \gamma\}$, т. е. M_ε является «ε-расширением» множества ΓN_x. Множества ΓN_x и ΓN_y являются ограниченными и замкнутыми как множества, заданные непрерывной функцией $f(x, \xi)$. Поэтому можно определить число $\varrho(y)$ следующим образом:

$$\beta(\eta) = \min_{\xi \in \Gamma N_x} \|\eta - \xi\|, \quad \varrho(y) = \max_{\eta \in \Gamma N_y} \beta(\eta),$$

тогда и $N_x \triangle N_y \subset M_{\varrho(y)}$.

Оказывается, что $\varrho(y) \to 0$ при $\delta \to 0$. Действительно, последовательности $y_n \to x$ соответствует последовательность η_n, для которой $\varrho(y_n) = \beta(\eta_n)$ и которая принадлежит некоторому компакту. Поэтому допустим, что сама последовательность сходится к $\bar{\eta}$. По предположению 1) из сходимости $(y_n, \eta_n) \to (x, \bar{\eta})$ следует сходимость $f(y_n, \eta_n) \to f(x, \bar{\eta}) = \gamma$, т. е. $\varrho(y_n) \to 0$ и $M_{\varrho(y)} \searrow \Gamma N_x$. Тогда по непрерывности меры $\int\limits_{M_{\varrho(y)}} dF(\xi) \to \int\limits_{\Gamma N_x} dF(\xi)$, но по предположению 2) $\int\limits_{\Gamma N_x} dF(\xi) = 0$.

Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|v(x) - v(y)| \leqslant \int\limits_{M_{\varrho(y)}} dF(\xi) \leqslant \varepsilon.$$

Вывод формулы (1). Допустим, что $f'_x(x, \xi)$ и $f'_\xi(x, \xi)$ непрерывны и $f'_\xi(x, \xi) \neq 0$ для почти всех ξ, удовлетворяющих условию $f(x, \xi) = f(x_0, \xi_0) = \gamma$ и $p(\xi)$ — непрерывная функция.

Для определения $v'(x)$ нужно выписать главную часть разности $v(x + \Delta x) - v(x)$

$$v(x+\Delta x)-v(x)=\int\limits_{f(x+\Delta x,\xi)\geqslant\gamma} p(\xi)\,d\xi-\int\limits_{f(x,\xi)\geqslant\gamma} p(\xi)\,d\xi=$$

$$=(v'(x),\Delta x)+o(\|\Delta x\|)=\int\limits_{V_1} p(\xi)\,d\xi-\int\limits_{V_2} p(\xi)\,d\xi,$$

где $V_1=\{\xi : f(x+\Delta x,\xi)\geqslant\gamma,\ \ f(x,\xi)<\gamma\}$ и

$V_2=\{\xi : f(x+\Delta x,\xi)<\gamma,\ \ f(x,\xi)\geqslant\gamma\}$.

На рис. 1 множество V_1 обозначено знаком плюс, а множество V_2 — знаком минус.

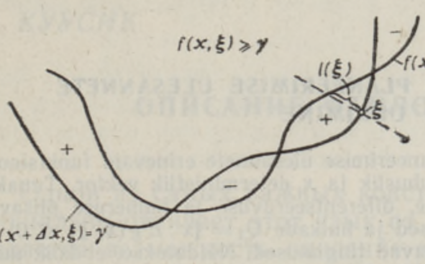

Рис. 1.

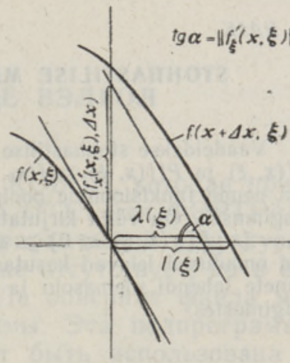

Рис. 2.

В силу непрерывности $p(\xi)$ главная часть этой разности может быть представлена поверхностным интегралом $\int\limits_{S_x} l(\xi)\,p(\xi)\,dS_x(\xi)$, по поверхности $S_x=\{\xi : f(x,\xi)=\gamma\}$, где $l(\xi)$ — длина отрезка между поверхностями S_x и $S_{x+\Delta x}$, взятая со знаком плюс, если $l(\xi)$ идет по наружной нормали, и со знаком минус, если $l(\xi)$ идет по внутренней нормали. Поскольку мы имеем дело с плотностью распределения вероятности, то мы можем предполагать, что поверхность S_x ограничена.

Для более наглядного определения главной части $l(\xi)$ используем рис. 2, где по оси ординат отложены значения функции $g(x,\ \xi)$, а ось абсцисс направлена по наружной нормали (на рис. 1 ось абсцисс рис. 2 для фиксированного ξ обозначена пунктиром). На рис. 2 главная часть $l(\xi)$ обозначена через $\lambda(\xi)$ и определяется из прямоугольного треугольника по формуле

$$\lambda(\xi)=\frac{(f'_x(x,\xi),\Delta x)}{\|f'_\xi(x,\xi)\|},$$

где $f'_x(x,\ \xi)$ — вектор частных производных по x;

$f'_\xi(x,\ \xi)$ — вектор частных производных по ξ;

$(f'_x(x,\ \xi),\ \Delta x)$ — скалярное произведение векторов.

И, окончательно,

$$v'(x)=\int\limits_{S_x}\frac{f'_x(x,\xi)}{\|f'_\xi(x,\xi)\|}\,p(\xi)\,dS_x(\xi),$$

где S_x — поверхность $S_x=\{\xi : f(x,\ \xi)=f(x_0,\ \xi_0)\}$;

$dS_x(\xi)$ — элемент площади поверхности S_x.

В заключение автор благодарит Т. Тобиаса за замечания и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoddart A. V. J., J. Austral. Math. Soc., **8**, 114 (1968).
2. Hanson M. A., J. Austral. Math. Soc., **4**, 347 (1964).
3. Поляк Б. Т., Матем. сб., **78 (120)**, 65 (1969).
4. Бурбаки Н., Функции действительного переменного. М., 1965.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/IV 1970

E. RAIK

STOHHASTILISE MITTELINEAARSE PLANEERIMISE ÜLESANNETE KVALITATIIVNE UURIMINE

Vaadeldakse stohhastilise mittelineaarse planeerimise ülesannete erinevaid funktsioone $Ef(x, \xi)$ ja $P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$, kus ξ on juhuslik ja x deterministlik vektor. Tuuakse ära nende funktsioonide poolpidevuse, pidevuse, diferentseeruvuse ja kumeruse piisavad tingimused. On välja kirjutatud tuletise avaldised ja hulkade $Q_1 = \{x : E\,g(x, \xi) \leqslant 0\}$ ja $Q_2 = \{x : P[g(x, \xi) \leqslant 0] \geqslant \alpha\}$ tõkestatuse piisavad tingimused. Näidatakse, et kõik uuritud omadused leiavad kasutamist vastavate stohhastilise mittelineaarse planeerimise ülesannete lahendi olemasolu ja ühesuse lausetes ning ekstreemumi piisavates ja tarvilikes tingimustes.

E. RAIK

QUALITATIVE RESEARCH INTO THE STOCHASTIC NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

The functions $E\,f(x, \xi)$ and $P[f(x, \xi) \geqslant f(x_0, \xi_0)]$ in the nonlinear stochastic problems are discussed, where ξ is random vector and x the determinate one. The sufficient conditions, such as semi-continuity, continuity, differentiability, convexity and quasi-convexity for these functions are given. Expressions for the derivatives of the above-mentioned functions and sufficient conditions for boundedness of the sets $Q_1 = \{x : E\,g(x, \xi) \leqslant 0\}$ and $Q_2 = \{x : P[g(x, \xi) \leqslant 0] \geqslant \alpha\}$ are written out. It is shown that all these conditions are used for proving the existence and uniqueness of solution in the stochastic nonlinear programming problems.