EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.1.01

УДК 519.3 : 51 : 62—50

*С. УЛЬМ*

# МЕТОД АГРЕГАЦИИ ДЛЯ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Рассматривается задача управления линейной динамической системой с квадратичным критерием качества. Исследуется вопрос о выборе матриц агрегации для приближенного решения задачи синтеза управлений. Для этой цели используются два критерия: 1) вероятностный критерий Клейнмана—Атанса и 2) если известна оптимальная стратегия, то требуется близость субоптимальной стратегии к оптимальной в среднеквадратичном смысле. Выводятся необходимые условия оптимальности для выбора матриц агрегации.

Пусть линейная динамическая система $S_1$ описывается системой уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

где $x(t)$ — $n$-мерный вектор состояния; $u(t)$ — $m$-мерный вектор управления; $A(t)$ и $B(t)$ — соответственно $n \times n$ и $n \times m$ непрерывные по $t$ матрицы; начальное состояние системы (1) задано.

Задача линейного оптимального регулятора будет состоять в определении управления $u(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$, которое минимизирует квадратичный критерий оптимальности

$$f = \frac{1}{2}\{x'(t_1)P(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt\}, \tag{2}$$

где $P(t_1)$ и $Q(t)$ — симметричные неотрицательно определенные $n \times n$ матрицы; $R(t)$ — симметричная положительно определенная $m \times m$ матрица. Кроме того, $Q(t)$, $R(t)$ — непрерывны по $t$.

Известно, что при этих предположениях оптимальное управление порождается линейным замкнутым законом управления

$$u(t) = K(t)x(t), \tag{3}$$

где

$$K(t) = -R^{-1}(t)B'(t)M(t), \tag{4}$$

а $M(t)$ — решение дифференциально-матричного уравнения Риккати

$$\begin{cases} -\dot{M} = A'M + MA - MBR^{-1}B'M + Q, \\ M(t_1) = P(t_1). \end{cases} \tag{5}$$

Известна также формула

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{2}x'(t_0)M(t_0)x(t_0). \tag{6}$$

Наряду с системой $S_1$ рассмотрим систему $S_2$

$$\dot{z} = F(t) z + G(t) u \tag{7}$$

с критерием оптимальности

$$\overline{f} = \frac{1}{2} \left\{ z'(t_1) \overline{P}(t_1) z(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [z'(t) \overline{Q}(t) z(t) + u'(t) R(t) u(t)] dt \right\}, \tag{8}$$

где $z(t)$, $F(t)$, $G(t)$, $\overline{P}(t_1)$, $\overline{Q}(t)$ имеют размерности соответственно $l$, $l \times l$, $l \times m$, $l \times l$, $l \times l$. Предполагается, что $l \ll n$.

Обозначим через $C$ $(l \times n)$-мерную матрицу агрегации (ср. [1,2]). Далее выберем

1) $F = CAC'$, (9)
2) $G = CB$, (10)
3) $\overline{P}(t_1) = CP(t_1) C'$, (11)
4) $\overline{Q} = CQC'$.* (12)

Отметим, что поскольку $P(t_1)$ и $Q(t)$ симметричны и неотрицательно определены , то этими свойствами обладают также $\overline{P}(t_1)$ и $\overline{Q}(t)$.

Оптимальное управление системой $S_2$ определяется, следовательно, формулами

$$u(t) = \overline{K}(t) z(t), \tag{13}$$

$$\overline{K}(t) = -R^{-1}(t) G'(t) \overline{M}(t), \tag{14}$$

$$\begin{cases} -\dot{\overline{M}} = F'\overline{M} + \overline{M}F - \overline{M}GR^{-1}G'\overline{M} + \overline{Q}, \\ \overline{M}(t_1) = \overline{P}(t_1). \end{cases} \tag{15}$$

Рассмотрим применение закона управления (13) к системе $S_1$, причем $z$ заменим на $Cx$

$$u(t) = \overline{K}Cx. \tag{13'}$$

При таком управлении значение критерия оптимальности (2) (ср. [3]) будет

$$f = \frac{1}{2} x'(t_0) L(t_0) x(t_0), \tag{16}$$

где $L(t)$ удовлетворяет линейному дифференциально-матричному уравнению

$$\begin{cases} -\dot{L} = D'L + LD + C'\overline{K}'R\overline{K}C + Q, \\ L(t_1) = P(t_1), \end{cases} \tag{17}$$

а

$$D = A + B\overline{K}C. \tag{18}$$

Если обозначить через $\Phi(t, \tau)$ переходную матрицу, соответствующую $D(t)$, то получим

---

* В работах [1,2] выбрано $F = CAC'(CC')^{-1}$ и $\overline{Q} = (CC')^{-1}CQC'(CC')^{-1}$ (рассматривается случай $P(t_1) \equiv 0$).

Для выбора $C$ требуется, чтобы собственные числа $F$ совпадали с первыми собственными числами $A$ ($F$ и $A$ считаются постоянными матрицами).

$$L(t) = \Phi'(t_1, t) P(t_1) \Phi(t_1, t) + \\ + \int\limits_t^{t_1} \Phi'(\tau, t) [Q(\tau) + C'\overline{K}'(\tau) R(\tau) \overline{K}(\tau) C] \Phi(\tau, t) \, d\tau. \tag{19}$$

Для выбора матрицы агрегации $C$ устансвим следующую задачу минимизации (ср. [3, 4]): минимизировать по $C$ функционал

$$\operatorname{tr} L(t_0). \tag{20}$$

Найдем необходимые условия оптимальности для этой задачи. Рассмотрим варьированную матрицу $C + \varepsilon\Delta C$ и обозначим соответствующее этой матрице решение уравнения (17) через $L_\varepsilon(t)$. По методике статей [3, 4] нетрудно установить, что в первом приближении по $\varepsilon$

$$\operatorname{tr}[L_\varepsilon(t_0) - L(t_0)] = 2\varepsilon \operatorname{tr} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi'(t, t_0) (B'L + R\overline{K}C)' \times \\ \times (\Delta\overline{K}C + \overline{K}\Delta C) \Phi(t, t_0) \, dt. \tag{21}$$

При этом

$$\Delta\overline{K} = -R^{-1}(\Delta G'\overline{M} + G'\Delta\overline{M}), \tag{22}$$

$$\Delta G = \Delta CB, \tag{23}$$

$$\Delta\overline{M} = \Psi'(t_1, t) \Delta\overline{P}(t_1) \Psi(t_1, t) + \\ + \int\limits_t^{t_1} \Psi'(\tau, t) [\Delta F'(\tau) \overline{M}(\tau) + \overline{M}(\tau) \Delta F(\tau) - \overline{M}(\tau) G(\tau) R^{-1}(\tau) \times \\ \times \Delta G'(\tau) \overline{M}(\tau) - \overline{M}(\tau) \Delta G(\tau) R^{-1}(\tau) G'(\tau) \overline{M}(\tau) + \Delta\overline{Q}(\tau)] \Psi(\tau, t) \, d\tau, \tag{24}$$

где $\Psi(t, \tau)$ — переходная матрица, соответствующая $F - GR^{-1}G'\overline{M}$;

$$\Delta\overline{P}(t_1) = \Delta CP(t_1) C' + CP(t_1) \Delta C'; \tag{25}$$

$$\Delta\overline{Q} = \Delta CQC' + CQ\Delta C'; \tag{26}$$

$$\Delta F = \Delta CAC' + CA\Delta C'. \tag{27}$$

Нашей дальнейшей задачей будет, используя формулы (22)—(27), представить (21) в виде

$$\operatorname{tr}[L_\varepsilon(t_0) - L(t_0)] = \varepsilon \operatorname{tr}[\tilde{G}'\Delta C]. \tag{28}$$

Если это удовлетворяется, то

$$\operatorname{grad}_C \operatorname{tr} L(t_0) = \tilde{G} \tag{29}$$

и уравнение

$$\tilde{G} = 0 \tag{30}$$

является необходимым условием оптимальности для выбора $C$. Представление (28) можно получить, используя элементарные свойства операции tr. Приведем окончательные результаты. Введем обозначения

$$U(t, t_0) = [B'(t) L(t) + R(t) \overline{K}(t) C] \Phi(t, t_0) \Phi'(t, t_0), \tag{31}$$

$$V(\tau, t, t_0) = \Psi(\tau, t) G(t) R^{-1}(t) U(t, t_0) C'\Psi'(\tau, t), \tag{32}$$

$$W(\tau, t, t_0) = V(\tau, t, t_0) + V'(\tau, t, t_0). \tag{33}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \tilde{G} = - \int\limits_{t_0}^{t_1} [\overline{K}'(t) U(t, t_0) + \overline{M}(t) CU'(t, t_0) R^{-1}(t) B'(t) +$$

$$+ W(t_1, t, t_0) C P(t_1)]dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t}^{t_1} [\overline{M}(\tau) W(\tau, t, t_0) C A'(\tau) + W(\tau, t, t_0) \overline{M}(\tau) C A(\tau) -$$
$$- \overline{M}(\tau) W(\tau, t, t_0) \overline{M}(\tau) G(\tau) R^{-1}(\tau) B'(\tau) +$$
$$+ W(\tau, t, t_0) C Q(\tau)]d\tau. \tag{34}$$

Для фактического вычисления матрицы агрегации можно использовать метод градиентов (ср. [3, 4]).

Рассмотрим вкратце вопрос о выборе матрицы агрегации $C$ в случае, когда оптимальная стратегия известна, ** но ее трудно реализовать.

По формулам (3), (4) оптимальная стратегия

$$u(t) = K(t) x(t),$$
$$K(t) = -R^{-1}(t) B'(t) M(t),$$

а по (13′), (14) субоптимальная стратегия

$$u(t) = \overline{K}(t) C x(t),$$
$$\overline{K}(t) = -R^{-1}(t) B'(t) C' \overline{M}(t).$$

В этом случае естественно минимизировать функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} \|K(t) - \overline{K}(t) C\|^2 dt. \tag{35}$$

Поскольку

$$K(t) - \overline{K}(t) C = -R^{-1}(t) B'(t) [M(t) - C'\overline{M}(t) C], \tag{36}$$

то критерий (35) можно заменить следующим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|M(t) - C'\overline{M}(t) C\|^2 dt. \tag{37}$$

Если в качестве нормы матрицы $V$ выбрать гильбертовую (или абсолютную) норму [6]

$$\|V\| = \sqrt{\operatorname{tr} VV'}, \tag{38}$$

то наша задача выражается в виде

$$\min_{C} \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{tr}[M(t) - C'\overline{M}(t) C]^2 dt. \tag{39}$$

Аналогично изложенному выше в данном случае нетрудно вывести необходимые условия оптимальности для выбора матрицы агрегации $C$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aoki M., Joint Autom. Contr. Conf., Preprints Papers, N. Y., 1967, p. 178.
2. Aoki M., IEEE Trans. Autom. Control, 13, 246 (1968).
3. Kleinman D. L., Athans M., IEEE Trans. Autom. Control, 13, 150 (1968).

** Об аналитическом решении дифференциально-матричного уравнения Риккати в случае $Q(t) \equiv 0$ см., напр., [5].

4. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 150 (1970).
5. Porter W. A., IEEE Trans. Autom. Control, **12**, 746 (1967).
6. Глазман И. М., Любич Ю. М., Конечномерный линейный анализ, М., 1969.

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
30/I 1970

*S. ULM*

**AGREGEERIMISMEETOD SUBOPTIMAALSETE JUHTIMISTE SÜNTEESIMISEKS**

Vaadeldakse ruutkriteeriumiga lineaarse dünaamilise süsteemi juhtimisülesannet. Uuritakse agregeerimismaatriksite valiku probleemi juhtimiste sünteesi ülesande ligikaudseks lahendamiseks. Sellel eesmärgil kasutatakse kaht kriteeriumi: 1) Kleinmani-Athans'i tõenäosuslikku kriteeriumi ja 2), kui on teada optimaalne strateegia, nõutakse suboptimaalse ja optimaalse strateegia lähedust ruutkeskmises mõttes. Tuletatakse tarvilikud tingimused agregeerimismaatriksite optimaalseks valikuks.

*S. ULM*

**ON THE METHOD OF AGGREGATION FOR SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL CONTROL**

In the paper the control problem of linear dynamical system with quadratic performance index is considered. The problem of choice of the aggregation matrix for approximate control synthesis is studied. For this purpose two criteria are used: 1) the Kleinman's-Athans' probability criterion, 2) the closeness in the mean of suboptimal and optimal strategies is required. The necessary conditions of optimality for choice of the aggregation matrix are derived.