EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.1.08

Ю. ЛЕМБРА

К ТЕОРИИ ФОКУСИРОВКИ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЕ С УСТОЙЧИВЫМИ СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ ТРАЕКТОРИЯМИ ЧАСТИЦ

В работе [1] предложен ускоритель с устойчивыми соприкасающимися траекториями частиц, конструкция которого позволила бы существенно уменьшить мощность питания радиочастотной системы и вес электромагнита. Однако в виду сложности теория этого ускорителя до сих пор полностью не разработана.

В данной работе мы приведем формулы, позволяющие вычислить модуль функции Флоке уравнения бетатронных колебаний этого ускорителя. Удобно вычислить квадрат модуля функции Флоке с помощью матричного метода [2]:

$$\Phi_{r,z}(s) = A_{12}^{(r,z)}(s)/\sin\mu_{r,z}, \tag{1}$$

где $\mu_{r,z}$ определяется из формулы

$$\cos\mu_{r,z} = \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A^{(r,z)}(s) = (\mathrm{const})_{r,z}. \tag{2}$$

Здесь $A^{(r,z)}(s)$ — матрица элемента периодичности магнитной системы; s — длина дуги равновесной орбиты. Индексы r и z относятся к радиальным и вертикальным бетатронным колебаниям соответственно.

Для сокращения записи пронумеруем прямолинейные и круговые участки равновесной орбиты, начиная с прямолинейного участка эндовибратора (см. рис. 1 в [1]). Обход совершаем против часовой стрелки.

Используя технику образования матриц элемента периодичности $A^{(r,z)}(s)$, изложенную в [3, 4], получим:

а) на первом прямолинейном участке

$$\left.\begin{aligned}
A^{(r)}(s) = {} & P(s)\,U(r^{-1},\varphi_1 r)\,B(\tau_1 r^{-1})\,P(l_2)\,B(\tau_2 r^{-1})\times\\
& \times U(r^{-1},(\pi-\varphi_1)r)\,B(\tau_3 r^{-1})\,P(l_3)\,B(\tau_3 r^{-1})\,U(r^{-1},(\pi-\varphi_1)r)\times\\
& \times B(\tau_2 r^{-1})\,P(l_2)\,B(\tau_1 r^{-1})\,U(r^{-1},\varphi_1 r)\,P(l_1-s),\\
A^{(z)}(s) = {} & P(\varphi_1 r+s)\,B(-\tau_1 r^{-1})\,P(l_2)\,B(-\tau_2 r^{-1})\times\\
& \times P((\pi-\varphi_1)r)\,B(-\tau_3 r^{-1})\,P(l_3)\,B(-\tau_3 r^{-1})\,P((\pi-\varphi_1)r)\times\\
& \times B(-\tau_2 r^{-1})\,P(l_2)\,B(-\tau_1 r^{-1})\,P(\varphi_1 r+l_1-s),\\
& \qquad\qquad 0\leqslant s\leqslant l_1;
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

б) на первом круговом участке

$$\left.\begin{aligned}
A^{(r)}(s) = {} & U(r^{-1},s)\,P(l_1)\,U(r^{-1},r\varphi_1)\,B(\tau_1 r^{-1})\,P(l_2)\times\\
& \times B(\tau_2 r^{-1})\,U(r^{-1},(\pi-\varphi_1)r)\,B(\tau_3 r^{-1})\,P(l_3)\,B(\tau_3 r^{-1})\times\\
& \times U(r^{-1},(\pi-\varphi_1)r)\,B(\tau_2 r^{-1})\,P(l_2)\,B(\tau_1 r^{-1})\,U(r^{-1},\varphi_1 r-s),\\
A^{(z)}(s) = {} & P(r\varphi_1+l_1+s)\,B(-\tau_1 r^{-1})\,P(l_2)\times\\
& \times B(-\tau_2 r^{-1})\,P((\pi-\varphi_1)r)\,B(-\tau_3 r^{-1})\,P(l_3)\,B(-\tau_3 r^{-1})\times\\
& \times P((\pi-\varphi_1)r)\,B(-\tau_2 r^{-1})\,P(l_2)\,B(-\tau_1 r^{-1})\,P(\varphi_1 r-s),\\
& \qquad\qquad 0\leqslant s\leqslant \varphi_1 r;
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

в) на втором прямолинейном участке

$$\left.\begin{aligned}
A^{(r)}(s) &= P(s)B(\tau_1 r^{-1})U(r^{-1}, r\varphi_1)P(l_1)U(r^{-1}, r\varphi_1)\times\\
&\times B(\tau_1 r^{-1})P(l_2)B(\tau_2 r^{-1})U(r^{-1}, (\pi-\varphi_1)r)B(\tau_3 r^{-1})\times\\
&\times P(l_3)B(\tau_3 r^{-1})U(r^{-1}, (\pi-\varphi_1)r)B(\tau_2 r^{-1})P(l_2-s),\\
A^{(z)}(s) &= P(s)B(-\tau_1 r^{-1})P(2r\varphi_1+l_1)\times\\
&\times B(-\tau_1 r^{-1})P(l_2)B(-\tau_2 r^{-1})P((\pi-\varphi_1)r)B(-\tau_3 r^{-1})\times\\
&\times P(l_3)B(-\tau_3 r^{-1})P((\pi-\varphi_1)r)B(-\tau_2 r^{-1})P(l_2-s),\\
&\qquad 0\leqslant s\leqslant l_2;
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

г) на втором круговом участке

$$\left.\begin{aligned}
A^{(r)}(s) &= U(r^{-1}, s)B(\tau_2 r^{-1})P(l_2)B(\tau_1 r^{-1})U(r^{-1}, r\varphi_1)\times\\
&\times P(l_1)U(r^{-1}, r\varphi_1)B(\tau_1 r^{-1})P(l_2)B(\tau_2 r^{-1})\times\\
&\times U(r^{-1}, (\pi-\varphi_1)r)B(\tau_3 r^{-1})P(l_3)B(\tau_3 r^{-1})U(r^{-1}, (\pi-\varphi_1)r-s),\\
A^{(z)}(s) &= P(s)B(-\tau_2 r^{-1})P(l_2)B(-\tau_1 r^{-1})\times\\
&\times P(2r\varphi_1+l_1)B(-\tau_1 r^{-1})P(l_2)B(-\tau_2 r^{-1})\times\\
&\times P((\pi-\varphi_1)r)B(-\tau_3 r^{-1})P(l_3)B(-\tau_3 r^{-1})P((\pi-\varphi_1)r-s),\\
&\qquad 0\leqslant s\leqslant(\pi-\varphi_1)r;
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

д) на третьем прямолинейном участке

$$\left.\begin{aligned}
A^{(r)}(s) &= P(s)B(\tau_3 r^{-1})U(r^{-1}, (\pi-\varphi_1)r)B(\tau_2 r^{-1})P(l_2)\times\\
&\times B(\tau_1 r^{-1})U(r^{-1}, r\varphi_1)P(l_1)U(r^{-1}, r\varphi_1)B(\tau_1 r^{-1})\times\\
&\times P(l_2)B(\tau_2 r^{-1})U(r^{-1}, (\pi-\varphi_1)r)B(\tau_3 r^{-1})P(l_3-s),\\
A^{(z)}(s) &= P(s)B(-\tau_3 r^{-1})P((\pi-\varphi_1)r)B(-\tau_2 r^{-1})P(l_2)\times\\
&\times B(-\tau_1 r^{-1})P(2r\varphi_1+l_1)B(-\tau_1 r^{-1})\times\\
&\times P(l_2)B(-\tau_2 r^{-1})P((\pi-\varphi_1)r)B(-\tau_3 r^{-1})P(l_3-s),\\
&\qquad 0\leqslant s\leqslant l_3.
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

В формулах (3)—(7) введены следующие обозначения:

$$B(x)\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix};\quad P(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad U(a,x)=\begin{pmatrix}\cos ax & a^{-1}\sin ax\\ -a\sin ax & \cos ax\end{pmatrix}.\tag{8}$$

В остальном использованы стандартные обозначения [1].

Матрицы $A^{(r,z)}(s)$ на третьем круговом, четвертом прямолинейном и четвертом круговом участках здесь не выписаны, так как, применяя модифицированное транспонирование матриц*, введенное в [5], можно убедиться, что их правые верхние элементы совпадают соответственно с правыми верхними элементами матриц (6), (5) и (4), если отсчет длины дуги равновесной орбиты на соответствующих участках начинать от граничной линии одинаковой симметрии относительно оси симметрии в средней плоскости магнита.

Применяя модифицированное транспонирование к матрицам (3) и (7), убеждаемся, что для первого и третьего прямолинейного участков характерно то, что функция Ф принимает на концах участка равные значения. Если вдобавок к этому учитывать, что в данном случае Ф зависит квадратично от s, то ясно, что Ф симметрична относительно середины участка и имеет в этой точке экстремум. Согласно общим соображениям (см., напр., [6], раздел 1а), этот экстремум является минимумом. Аналогично во всех остальных случаях, когда функция Ф зависит квадратично от s (см. вторые формулы (4) и (6), а также обе формулы (5)), экстремумы (если они на данном участке существуют) являются минимумами.

---

* Переход от матрицы $\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$ к матрице $\begin{pmatrix}C_{22} & C_{12}\\ C_{21} & C_{11}\end{pmatrix}$.

Как выяснилось, непосредственное умножение матриц, входящих в формулы (3) — (7), дает очень громоздкие результаты. Поэтому в целях получения конечных результатов следует прибегать к численным расчетам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мороз Е. М., Атомная энергия, 4, 238 (1958).
2. Лембра Ю. Я., ЖТФ, 35, 574 (1965).
3. Лембра Ю., Изв. АН ЭССР. Серия физ.-матем. и техн. наук, 14, 237 (1965).
4. Лембра Ю. Я., Изв. высш. уч. зав., Физика, № 4, 65 (1966).
5. Лембра Ю. Я., Атомная энергия, 23, 137 (1967).
6. Лембра Ю. Я., ЖТФ, 30, 405 (1960).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
7/I 1969

J. LEMBRA

OSAKESTE FOKUSEERIMISE TEOORIAST KOKKUPUUTUVATE STABIILSETE TRAJEKTOORIDEGA KIIRENDAJAS

Maatriksmeetodil [2] tuletatakse valemid, mille abil on võimalik kokkupuutuvate stabiilsete trajektooridega kiirendaja [1] korral arvutada betatronvõnkumiste võrrandi Floquet' funktsiooni moodulit. Näidatakse, et Floquet' funktsiooni moodul on keskpunkti suhtes sümmeetriline ainult endovibraatori ja tema vastas paiknevas sirgjoonelises sektsioonis.

J. LEMBRA

ON THE THEORY OF FOCUSING OF PARTICLES IN AN ACCELERATOR WITH STABLE ADJOIN TRAJECTORIES

The matrix method [2] is used for deriving formulae which permit the calculation of modulus of Floquet's function of betatron oscillations in the accelerator with stable adjoin trajectories [1] of particles. It is shown that the modulus of Floquet's function and, consequently, the amplitude of betatron oscillations, is symmetrical with respect to the middle point, in the straight section of the cavity resonator and in the opposite straight section, only.