EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.1.06

Л. АЙНОЛА

К ВАРИАЦИОННЫМ ПРИНЦИПАМ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

В зависимости от рассматриваемых задач вариационные принципы теории упругости могут быть разделены на следующие группы: принципы для статических задач, варианты принципа Гамильтона—Остроградского и принципы для динамических задач с начальными условиями [1, 2]. Эти же группы вариационных принципов можно сформулировать и для теории несимметричной упругости. Для статических задач теории несимметричной упругости вариационные принципы приведены в [3]; принцип Гамильтона—Остроградского послужил исходным пунктом для некоторых вариантов теории несимметричной упругости в работах [4, 5].

В настоящей работе представлены вариационные принципы теории несимметричной упругости для динамических задач с начальными условиями. В отличие от работ [2, 6], при выводе вариационных принципов используется метод преобразования Лапласа. Этот метод ранее применялся с целью получения законов взаимности для динамических задач [7].

Рассматриваются три вида вариационных принципов, соответствующие в статическом случае теории упругости принципам Ху-Вашизу, Лагранжа и Кастильяно. Последний вид принципа приводит к динамическим уравнениям в напряжениях и микромоментах. Эти уравнения для теории несимметричной упругости формулируются в первой части работы.

1. Основные уравнения

Исходим из следующих уравнений линейной теории несимметричной упругости [8–10]:
уравнения движения

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \pi^{\cdot}, \quad \nabla \cdot \mu + \sigma_{\times} + \mathbf{c} = \nu; \tag{1.1}$$

кинематических соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \times \Phi, \quad \varkappa = \nabla \Phi; \\ \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\cdot}, \quad \Psi = \Phi^{\cdot}; \end{aligned} \tag{1.2}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} \sigma = \mathbf{E} : \varepsilon + \mathbf{K} : \varkappa, \quad \mu = \varepsilon : K + M : \varkappa, \\ \pi = \varrho \mathbf{v}, \quad \nu = j\Psi; \end{aligned} \tag{1.3}$$

причем

$$\mathbf{E} : \varepsilon = \varepsilon : \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} : \varkappa = \varkappa : \mathbf{M}. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, Φ — вектор поворота, $\mathbf{v}$ — вектор скорости перемещений, Ψ — вектор скорости поворотов, π — вектор импульсов перемещений, ν — вектор импульсов поворотов, σ — тензор напряжений, μ — тензор микромоментов, $\mathbf{f}$ — вектор объемных сил, $\mathbf{c}$ — вектор объемных моментов, ϱ — плотность массы среды, $\mathbf{j}$ — плотность моментов инерции среды, ε — тензор деформации, $\varkappa$ — тензор кручения-изгиба, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ — тензоры упругости, ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, $\sigma_\times$ — вектор тензора σ, $()^{\bullet}$ — производные по времени t.

К уравнениям (1.1)—(1.6) присоединяем начальные условия

$$\mathbf{u}(x^k, 0) = \mathbf{u}_0(x^k), \quad \Phi(x^k, 0) = \Phi_0(x^k); \tag{1.5}$$

$$\pi(x^k, 0) = \pi_0(x^k), \quad \nu(x^k, 0) = \nu_0(x^k) \tag{1.6}$$

в объеме V и следующие граничные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad \Phi = \lambda \tag{1.7}$$

на поверхности S_1 и

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{n} \cdot \mu = \mathbf{R} \tag{1.8}$$

на поверхности $S_2 = S - S_1$. Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

Обозначив преобразование Лапласа относительно времени t через

$$\overline{f}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x, t)\, dt, \tag{1.9}$$

проведем преобразование Лапласа уравнений (1.1)—(1.3) и условий (1.7), (1.8), учитывая соотношения (1.5), (1.6).

Имеем

$$\nabla \cdot \overline{\sigma} + \overline{\mathbf{f}} = s\overline{\pi} - \pi_0, \quad \nabla \cdot \overline{\mu} + \overline{\sigma}_\times + \overline{\mathbf{c}} = s\overline{\nu} - \nu_0; \tag{1.10}$$

$$\overline{\varepsilon} = \nabla\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{I} \times \overline{\Phi}, \quad \overline{\varkappa} = \nabla\overline{\Phi}; \tag{1.11}$$

$$\overline{\mathbf{v}} = s\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0, \quad \overline{\Psi} = s\overline{\Phi} - \Phi_0; \tag{1.12}$$

$$\overline{\sigma} = \mathbf{E} : \overline{\varepsilon} + \mathbf{K} : \overline{\varkappa}, \quad \overline{\mu} = \overline{\varepsilon} : \mathbf{K} + \mathbf{M} : \overline{\varkappa}, \quad \overline{\pi} = \varrho\overline{\mathbf{v}}, \quad \overline{\nu} = j\overline{\Psi} \tag{1.13}$$

в объеме V;

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{w}}, \quad \overline{\Phi} = \overline{\lambda} \tag{1.14}$$

на поверхности S_1 и

$$\mathbf{n} \cdot \overline{\sigma} = \overline{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{n} \cdot \overline{\mu} = \overline{\mathbf{R}} \tag{1.15}$$

на поверхности S_2.

2. Уравнения в напряжениях и микромоментах

Сформулируем уравнения теории несимметричной упругости в напряжениях и микромоментах. Аналогичные уравнения для классической теории упругости приведены в работе [11].

Исключаем из уравнений (1.10)—(1.13) все величины, кроме тензоров напряжений $\overline{\sigma}$ и микромоментов $\overline{\mu}$. Для этого представим соотношения упругости (1.13) в виде

$$\overline{\varepsilon} = \mathbf{P} : \overline{\sigma} + \mathbf{N} : \overline{\mu}, \quad \overline{\varkappa} = \overline{\sigma} : \mathbf{N} + \mathbf{L} : \overline{\mu}; \tag{2.1}$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{\varrho}\overline{\pi}, \quad \overline{\Psi} = \frac{1}{j}\overline{\nu} \tag{2.2}$$

и выразим векторы $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\Phi}$ с помощью соотношений (1.12), (2.2), (1.10) в следующем виде:

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{1}{\varrho s^2}\nabla\cdot\overline{\sigma} + \frac{1}{\varrho s^2}(\overline{\mathbf{f}} + \pi_0) + \frac{1}{s}\mathbf{u}_0,$$
$$\overline{\Phi} = \frac{1}{js^2}(\nabla\cdot\overline{\mu} + \overline{\sigma}_\times) + \frac{1}{js^2}(\overline{\mathbf{c}} + \nu_0) + \frac{1}{s}\Phi_0. \tag{2.3}$$

Подставляя выражения (2.1), (2.3) в соотношения (1.11), получаем

$$s^2(\mathbf{P}:\overline{\sigma} + \mathbf{N}:\overline{\mu}) = \frac{1}{\varrho}\nabla\nabla\cdot\overline{\sigma} + \frac{1}{j}\mathbf{I}\times(\nabla\cdot\overline{\mu} + \overline{\sigma}_\times) +$$
$$+ \frac{1}{\varrho}\nabla\overline{\mathbf{f}} + \frac{1}{j}\mathbf{I}\times\overline{\mathbf{c}} + s\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{\cdot}, \tag{2.4}$$
$$s^2(\overline{\sigma}:\mathbf{N} + \mathbf{L}:\overline{\mu}) = \frac{1}{j}\nabla(\nabla\cdot\overline{\mu} + \overline{\sigma}_\times) + \frac{1}{j}\nabla\overline{\mathbf{c}} + s\varkappa_0 + \varkappa_0^{\cdot},$$

где

$$\varepsilon_0 = \nabla\mathbf{u}_0 + \mathbf{I}\times\Phi_0, \qquad \varkappa_0 = \nabla\Phi_0,$$
$$\varepsilon_0^{\cdot} = \frac{1}{\varrho}\nabla\pi_0 + \frac{1}{j}\mathbf{I}\times\nu_0, \qquad \varkappa_0^{\cdot} = \frac{1}{j}\nabla\nu_0. \tag{2.5}$$

Если учесть, что начальные условия в напряжениях и микромоментах имеют вид

$$\sigma_0 = \mathbf{E}:\varepsilon_0 + \mathbf{K}:\varkappa_0, \qquad \mu_0 = \varepsilon_0:\mathbf{K} + \mathbf{M}:\varkappa_0; \tag{2.6}$$
$$\sigma_0^{\cdot} = \mathbf{E}:\varepsilon_0^{\cdot} + \mathbf{K}:\varkappa_0^{\cdot}, \qquad \mu_0^{\cdot} = \varepsilon_0^{\cdot}:\mathbf{K} + \mathbf{M}:\varkappa_0^{\cdot}, \tag{2.7}$$

то обратное преобразование уравнений (2.4) дает

$$\frac{1}{\varrho}\nabla\nabla\cdot\sigma + \frac{1}{j}\mathbf{I}\times(\nabla\cdot\mu + \sigma_\times) + \frac{1}{\varrho}\nabla\mathbf{f} + \frac{1}{j}\mathbf{I}\times\mathbf{c} =$$
$$= \mathbf{P}:\sigma^{\cdot\cdot} + \mathbf{N}:\mu^{\cdot\cdot}, \tag{2.8}$$
$$\frac{1}{j}\nabla(\nabla\cdot\mu + \sigma_\times) + \frac{1}{j}\nabla\mathbf{c} = \sigma^{\cdot\cdot}:\mathbf{N} + \mathbf{L}:\mu^{\cdot\cdot}.$$

3. Полный вариационный принцип

Найдем вариационную формулировку для задачи (1.1)—(1.8). Сначала выразим преобразованную задачу (1.10)—(1.15) в виде вариационной задачи аналогично статическим задачам теории несимметричной упругости и далее найдем оригинал соответствующего функционала преобразования.

Легко проверить, что уравнения и соотношения (1.10)—(1.15) являются условиями стационарности следующего функционала:

$$\overline{I}(s) = \int_V \Big[-\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}:\mathbf{E}:\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon}:\mathbf{K}:\overline{\varkappa} - \frac{1}{2}\overline{\varkappa}:\mathbf{M}:\overline{\varkappa} +$$
$$+ \overline{\sigma}:(\overline{\varepsilon} - \nabla\overline{\mathbf{u}} - \mathbf{I}\times\overline{\Phi}) + \overline{\mu}:(\overline{\varkappa} - \nabla\overline{\Phi}) - \frac{\varrho}{2}\overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{v}} -$$

$$-\frac{j}{2}\overline{\Psi}\cdot\overline{\Psi}+\overline{\pi}\cdot(\overline{\mathbf{v}}-s\overline{\mathbf{u}}+\mathbf{u}_0)+\overline{\nu}\cdot(\overline{\Psi}-s\overline{\Phi}+\Phi_0)+$$

$$+\overline{\mathbf{f}}\cdot\overline{\mathbf{u}}+\overline{\mathbf{c}}\cdot\overline{\Phi}+\pi_0\cdot\overline{\mathbf{u}}+\nu_0\cdot\overline{\Phi}\Big]dV+\int_{S_1}(\overline{\mathbf{Q}}\cdot\overline{\mathbf{u}}+\overline{\mathbf{R}}\cdot\overline{\Phi})\,dS+$$

$$+\int_{S_2}[(\overline{\mathbf{u}}-\overline{\mathbf{w}})\cdot\mathbf{n}\cdot\overline{\sigma}+(\overline{\Phi}-\overline{\lambda})\cdot\mathbf{n}\cdot\overline{\mu}]\,dS. \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{a}*\mathbf{b}=\int_0^t\mathbf{a}(x^\nu,\tau)\cdot\mathbf{b}(x^\nu,t-\tau)\,d\tau,$$
$$\mathbf{A}\overset{*}{:}\mathbf{B}=\int_0^t\mathbf{A}(x^\nu,\tau):\mathbf{B}(x^\nu,t-\tau)\,d\tau \tag{3.2}$$

и найдем оригинал изображения $\overline{I}\ (s)$, учитывая начальные условия (1.5). Имеем

$$I(t)=\int_V\Big[-\frac{1}{2}\varepsilon\overset{*}{:}\mathbf{E}:\varepsilon-\varepsilon\overset{*}{:}\mathbf{K}:\varkappa-\frac{1}{2}\varkappa\overset{*}{:}\mathbf{M}:\varkappa+$$
$$+\sigma\overset{*}{:}(\varepsilon-\nabla\mathbf{u}-\mathbf{I}\times\Phi)+\mu\overset{*}{:}(\varkappa-\nabla\Phi)-\frac{\varrho}{2}\mathbf{v}*\mathbf{v}-$$
$$-\frac{j}{2}\Psi*\Psi+\pi*(\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}})+\nu*(\Psi-\dot{\Phi})+\mathbf{f}*\mathbf{u}+$$
$$+\mathbf{c}*\Phi+\pi_0\cdot\mathbf{u}(x^\nu,t)+\nu_0\cdot\Phi(x^\nu,t)\Big]dV+$$
$$+\int_{S_1}(\mathbf{Q}*\mathbf{u}+\mathbf{R}*\Phi)\,dS+\int_{S_2}[(\mathbf{u}-\mathbf{w})*\mathbf{n}\cdot\sigma+$$
$$+(\Phi-\lambda)*\mathbf{n}\cdot\mu]\,dS. \tag{3.3}$$

Варьируемыми величинами в функционале (3.3) являются векторы и тензоры $\mathbf{u}$, Φ, $\mathbf{v}$, Ψ, π, ν, ε, $\varkappa$, причем предполагается, что предварительно удовлетворены начальные условия (1.5). Условиями стационарности функционала (3.3) будут в промежутке времени $(0, t)$ уравнения (1.1)—(1.3), граничные условия (1.7)—(1.8) и начальные условия (1.6).

4. Частные виды вариационного принципа

Сперва приводим вариационный принцип для динамической теории несимметричной упругости, сформулированной только с помощью векторов перемещений и поворотов. Если из функционала (3.3) исключить с помощью соотношений (1.2), (1.3) все варьируемые величины, кроме названных, и предположить, что геометрические граничные условия (1.7) предварительно удовлетворены, то получается функционал

$$I_1(t)=\int_V\Big[-\frac{1}{2}\varepsilon\overset{*}{:}\mathbf{E}:\varepsilon-\varepsilon\overset{*}{:}\mathbf{K}:\varkappa-\frac{1}{2}\varkappa\overset{*}{:}\mathbf{M}:\varkappa-$$
$$-\frac{\varrho}{2}\dot{\mathbf{u}}*\dot{\mathbf{u}}-\frac{j}{2}\dot{\Phi}*\dot{\Phi}+\mathbf{f}*\mathbf{u}+\mathbf{c}*\Phi+\pi_0\cdot\mathbf{u}(x^\nu,t)+$$

$$+ v_0 \cdot \Phi(x^\nu, t) \Big] dV + \int\limits_{S_1} (\mathbf{Q} * \mathbf{u} + \mathbf{R} * \Phi) dS. \tag{4.1}$$

Условиями стационарности этого функционала являются уравнения движения (1.1) в перемещениях и поворотах, статические граничные условия (1.8) и начальные условия (1.6).

Далее найдем вариационную формулировку для уравнений движения в напряжениях и микромоментах (2.8). Для этого сперва исключим из функционала (3.3) с помощью соотношений (1.1), (2.1), (2.2) все варьируемые величины, кроме σ, μ, π, ν. Получим

$$I_2(t) = \int\limits_V \Big[\frac{1}{2} \sigma \mathbin{\dot{*}} \mathbf{P} : \sigma + \sigma \mathbin{\dot{*}} \mathbf{N} : \mu + \frac{1}{2} \mu \mathbin{\dot{*}} \mathbf{L} : \mu +$$

$$+ \frac{1}{2\varrho} \pi * \pi + \frac{1}{2j} \nu * \nu + \mathbf{u}_0 \cdot \pi(x^\nu, t) + \Phi_0 \cdot \nu(x^\nu, t) \Big] dV -$$

$$- \int\limits_{S_2} (\mathbf{w} * \mathbf{n} \cdot \sigma + \lambda * \mathbf{n} \cdot \mu) dS. \tag{4.2}$$

Чтобы исключить из числа варьируемых величин и π, ν, проведем двукратное дифференцирование функционала (4.2) по t и используем уравнения (1.1). Применяя формулу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\cdot} * \mathbf{b}^{\cdot} + \mathbf{a}(x^\nu, 0) \cdot \mathbf{b}^{\cdot}(x^\nu, t) + \mathbf{b}(x^\nu, 0) \cdot \mathbf{a}^{\cdot}(x^\nu, t), \tag{4.3}$$

имеем

$$I_3(t) = \int\limits_V \Big[\frac{1}{2} \sigma^{\cdot} \mathbin{\dot{*}} \mathbf{P} : \sigma^{\cdot} + \sigma^{\cdot} \mathbin{\dot{*}} \mathbf{N} : \mu^{\cdot} + \frac{1}{2} \mu^{\cdot} \mathbin{\dot{*}} \mathbf{L} : \mu^{\cdot} +$$

$$+ \frac{1}{2\varrho} \nabla \cdot \sigma * \nabla \cdot \sigma + \frac{1}{2j} \nabla \cdot \mu * \nabla \cdot \mu + \frac{1}{2j} \sigma_\times * \sigma_\times +$$

$$+ \frac{1}{j} \nabla \cdot \mu * \sigma_\times + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \sigma * \mathbf{f} + \frac{1}{j} \nabla \cdot \mu * \mathbf{c} + \frac{1}{j} \sigma_\times * \mathbf{c} +$$

$$+ \sigma(x^\nu, 0) : \mathbf{P} : \sigma^{\cdot}(x^\nu, t) + \sigma(x^\nu, 0) : \mathbf{N} : \mu^{\cdot}(x^\nu, t) +$$

$$+ \sigma^{\cdot}(x^\nu, t) : \mathbf{N} : \mu(x^\nu, 0) + \mu(x^\nu, 0) : \mathbf{L} : \mu^{\cdot}(x^\nu, t) +$$

$$+ \frac{1}{\varrho} \pi_0 \cdot \nabla \cdot \sigma(x^\nu, t) + \frac{1}{j} \nu_0 \cdot \nabla \cdot \mu(x^\nu, t) + \frac{1}{j} \nu_0 \cdot \sigma_\times(x^\nu, t) +$$

$$+ \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \cdot \sigma^{\cdot}(x^\nu, t) + \Phi_0 \cdot \nabla \cdot \mu^{\cdot}(x^\nu, t) + \Phi_0 \cdot \sigma^{\cdot}_\times(x^\nu, t) \Big] dV -$$

$$- \int\limits_{S_2} (\mathbf{w} * \mathbf{n} \cdot \sigma + \lambda * \mathbf{n} \cdot \mu)^{\cdot\cdot} dS. \tag{4.4}$$

Условиями стационарности функционала (4.4) являются: уравнения движения в напряжениях и микромоментах (2.8), граничные условия на S_2

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \varrho \mathbf{w}^{\cdot\cdot}, \quad \nabla \cdot \mu + \sigma_\times + \mathbf{c} = j \lambda^{\cdot\cdot} \tag{4.5}$$

и начальные условия

$$\mathbf{P} : \sigma(x^\nu, 0) + \mathbf{N} : \mu(x^\nu, 0) = \varepsilon_0, \quad \sigma(x^\nu, 0) : \mathbf{S} + \mathbf{L} : \mu(x^\nu, 0) = \varkappa_0 \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P} : \sigma^{\cdot}(x^{\nu}, 0) + \mathbf{N} : \mu^{\cdot}(x^{\nu}, 0) = \varepsilon_{0}^{\cdot}, \quad \sigma^{\cdot}(x^{\nu}, 0) : \mathbf{N} + \mathbf{L} : \mu^{\cdot}(x^{\nu}, 0) = \varkappa_{0}^{\cdot}. \tag{4.7}$$

Здесь учтены обозначения (2.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gurtin M. E., Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 34 (1964).
2. Айнола Л. Я., Докл. АН СССР, **172**, 306 (1967).
3. Koiter W. T., Proc. Koninkl. nederl. akad. Wet., B **67**, 1 (1964).
4. Mindlin R. D., Arch. Rat. Mech. Anal., **16**, 51 (1964).
5. Mindlin R. D., Eshel N. N., Intern. J. Solids and Struct., **4**, 109 (1968).
6. Айнола Л. Я., Прикл. механ., **4**, 36 (1968).
7. Sandru N., Atti Accad. naz Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., **38**, 78 (1965).
8. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л., ФТТ, **5**, 2591 (1963).
9. Пальмов В. А., ПММ, **28**, 401 (1964).
10. Neuber H., On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. In: Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Mech., Munich 1964; Berlin, Heidelberg, New York, 1966, p. 153.
11. Ignaczak J., Arch. Mech. Stosow., **15**, 227 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/II 1969

L. AINOLA

LINEAARSE MITTESÜMMEETRILISE ELASTSUSTEOORIA VARIATSIOONPRINTSIIPIDEST

Esitatakse variatsioonprintsiibid mittesümmeetrilise lineaarse elastsusteooria alg- ja ääretingimustega dünaamikaülesannete jaoks. Erinevalt töödest [2,6] kasutatakse variatsioonprintsiipide tuletamiseks Laplace'i teisenduse meetodit. Esitatakse printsiibid, mis vastavad Hu-Washizu, Lagrange'i ja Castigliano variatsioonprintsiipidele. Viimasest järgnevad võrrandid, mis on formuleeritud mikromomentides ja pingetes ning samuti esitatakse käesolevas töös.

L. AINOLA

ON VARIATIONAL PRINCIPLES OF THE LINEAR THEORY OF ASYMMETRIC ELASTICITY

The variational principles for dynamic problems of the linear theory of asymmetric elasticity with initial and boundary conditions are given. By deriving the principles unlike the investigations [2,6], the Laplace transformation method is used. The variational principles, which corresponds to Hu-Washizu's, Lagrange's and Castigliano's principles, are presented. The last principle deals with equations in micromoments and stresses, which are also given.