

И. ПЕТЕРСЕН

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОЛИНОМОВ НА КРУГЕ МЕТОДОМ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР

Метод воспроизводящих ядер применяется для построения оценки полинома двух переменных по измерениям на единичном круге. Исследуется дисперсия этой оценки в случае полиномов до восьмой степени.

1. Введение

Метод воспроизводящих ядер был предложен в [1] для восстановления функций из классов с известными воспроизводящими ядрами [2]. В [3] обсуждалась связь этого метода с методом наименьших квадратов. Рассмотренный в [3] пример восстановления полинома третьей степени по измерениям в 12 точках единичного круга показал, что подход метода воспроизводящих ядер позволяет, кроме явного построения определенной оценки полинома (в общем неэффективной), получить иногда хороший план регрессионных экспериментов вместе с оценкой сверху для дисперсии оценки полинома. В [4] этот подход был применен в случае полиномов одной переменной на отрезке. В данной работе метод воспроизводящих ядер применяется в случае полиномов двух переменных с измерениями на единичном круге.

При заданных области Q и классе функций F подход метода воспроизводящих ядер требует еще задания меры μ на Q , построения по этой мере воспроизводящего ядра для F и построения квадратурной формулы, точной для $F \times F$ по мере μ . В качестве меры на единичном круге в данной работе исследуется мера $\mu(dx, dy) = dx dy / 2\pi \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, которая дает большой вес областям, близким к единичной окружности. Как показывают результаты, такой выбор меры оправдан — для полиномов до восьмой степени дисперсия непрерывного метода наименьших квадратов по этой мере не более чем в 1,8 раза превышает дисперсию по оптимальной для каждой степени полиномов мере [5, 6]. Построение воспроизводящих ядер осуществляется через построение ортонормированной по выбранной мере системы полиномов двух переменных. В качестве квадратурной формулы применяется

прямое произведение двух одномерных формул с наивысшей точностью. Избыточность точек измерений при этом не больше двух.

С точки зрения теории планирования регрессионных экспериментов полученные результаты имеют следующий смысл. Для полиномов двух переменных степени n на единичном круге найдена система точек, число которых менее чем в два раза превышает число коэффициентов полинома, такая, что максимальная дисперсия оценки наименьших квадратов полинома на единичном круге по равноточным экспериментам в этих точках при $n \leq 8$ не превышает более чем в 2,82 раза максимальной дисперсии оценки полинома на этом круге при любом расчленении такого же количества экспериментальных точек и при любом распределении относительной точности измерений в этих точках.

2. Построение воспроизводящего ядра

Пусть F_n — линейный класс всех алгебраических полиномов двух переменных степени не выше n . Воспроизводящее ядро [2] для класса F_n по мере

$$\mu(dx, dy) = \frac{dx dy}{2\pi \sqrt{1-x^2-y^2}} \quad (2.1)$$

на круге $x^2 + y^2 \leq 1$ — это алгебраический полином $K_n(x, y; \xi, \eta)$ четырех переменных, степени n по обоим парам переменных x, y и ξ, η , такой, что для любой $f \in F_n$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} K_n(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{2\pi \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} = f(x, y). \quad (2.2)$$

Для построения $K_n(x, y; \xi, \eta)$ переходим к полярным координатам, полагая

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & \xi &= \rho \cos \Theta, \\ y &= r \sin \varphi, & \eta &= \rho \sin \Theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Преобразование (2.3) переводит класс F_n в определенный подкласс Φ_n класса Ψ_n всех таких функций от r и φ , которые являются алгебраическими и тригонометрическими полиномами степени не выше n соответственно от r и φ . Ψ_n не совпадает с Φ_n при $n > 0$, так как, например, $\psi(r, \varphi) = r$ принадлежит Ψ_n , но не принадлежит Φ_n . Один базис класса Ψ_n образуют все функции вида $r^i \cos k\varphi$, $r^i \sin k\varphi$, $i=0, 1, \dots, n$, $k=0, 1, \dots, n$. Часть этого базиса, состоящая из всех функций

$$r^{2i+k} \cos k\varphi, \quad r^{2i+k} \sin k\varphi, \quad 2i+k = m \quad (2.4)$$

с $m=0, 1, \dots, n$, образует базис для Φ_n . Действительно, по формулам Муавра $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ являются однородными алгебраическими полиномами степени k от $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, следовательно, $r^h \cos k\varphi$ и $r^h \sin k\varphi$ также однородные алгебраические полиномы от $r \cos \varphi$ и $r \sin \varphi$, т. е. от x и y . Так как r^{2i} — однородный полином от x и y степени $2i$, то при фиксированном m все функции (2.4) являются образами однородных алгебраических полиномов степени m от x и y класса F_n . Очевидно, все функции (2.4) линейно независимы и их число при фиксированном m равно $m+1$. Так как в F_n имеется также точно $m+1$ линейно независимых однородных полиномов степени m , то существует взаимно однозначное соответствие между однородными полиномами степени m класса F_n и линейными комбинациями функции (2.4) с данным m . Поэтому функции (2.4) при $m=0, 1, \dots, n$ действительно образуют базис Φ_n .

При переходе к полярным координатам мера (2.1) преобразуется в

$$v(dr, d\varphi) = \frac{r dr d\varphi}{2\pi \sqrt{1-r^2}}. \quad (2.5)$$

На основании базиса (2.4) класса Φ_n можно построить ортонормированный по мере (2.5) базис этого класса. Обозначим через

$Q_k^{(h)}(r), Q_{k+2}^{(h)}(r), \dots, Q_{k+2i}^{(h)}(r), \dots$ систему полиномов, полученную ортонормированием на отрезке $0 \leq r \leq 1$ по мере $rdr/\sqrt{1-r^2}$ системы степеней $r^k, r^{k+2}, \dots, r^{k+2i}, \dots$:

$$\int_0^1 Q_{k+2i}^{(h)}(r) Q_{k+2j}^{(h)}(r) \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \delta_{ij}. \quad (2.6)$$

Известно, что функции $1, \sqrt{2} \cos k\varphi, \sqrt{2} \sin k\varphi, k = 1, 2, \dots$ образуют ортонормированную на отрезке $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ систему функций по мере $d\varphi/2\pi$. Тогда все функции

$$Q_{2i}^{(0)}(r), Q_{k+2i}^{(h)}(r) \sqrt{2} \cos k\varphi, Q_{k+2i}^{(h)}(r) \sqrt{2} \sin k\varphi, \quad (2.7)$$

$$(i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots)$$

образуют ортонормированную систему на единичном круге по мере (2.5). Очевидно, часть системы (2.7) с $k+2i \leq n$ линейно выражается через базис (2.4) класса Φ_n и наоборот. Следовательно, функции (2.7) с $k+2i \leq n$ образуют ортонормированный на единичном круге базис Φ_n по мере (2.5).

Введенные выше полиномы $Q_{k+2i}^{(h)}(r)$ могут быть определены через классические ультрасферические полиномы. Действительно, по определению $Q_{k+2i}^{(h)}(r)$ имеем

$$Q_{k+2i}^{(h)}(r) = r^k q_{2i}^{(h)}(r), \quad (2.8)$$

где $q_{2i}^{(h)}(r)$ — четный полином степени $2i$.

Из (2.6) имеем

$$\int_0^1 q_{2i}^{(h)}(r) q_{2j}^{(h)}(r) \frac{r^{2k+1}}{\sqrt{1-r^2}} dr = \delta_{ij} \quad (2.9)$$

и после замены $v = \sqrt{1-r^2}$ с учетом четности $q_{2i}^{(h)}$ и $q_{2j}^{(h)}$

$$2 \int_{-1}^1 q_{2i}^{(h)}(\sqrt{1-v^2}) q_{2j}^{(h)}(\sqrt{1-v^2}) (1-v^2)^k dv = \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

Обозначая

$$q_{2i}^{(h)}(\sqrt{1-x^2}) = C_{2i}^{(h)} P_{2i}^{(h+1/2)}(x), \quad (2.11)$$

увидим из (2.10), что полиномы $P_{2i}^{(\lambda)}(x)$ ортогональны на $-1 \leq x \leq 1$ по весу $(1-x^2)^{\lambda-1/2}$ и поэтому совпадают при подходящем выборе коэффициентов $C_{2i}^{(h)}$ с ультрасферическими полиномами. Соответствующим значением $C_{2i}^{(h)}$ является [7]

$$C_{2i}^{(k)} = \sqrt{\frac{(2k+4i+1)(2i)!}{(2k+2i)!}} (2k-1)!! \quad (2.12)$$

Таким образом, ортонормированным на единичном круге базисом класса Φ_n по мере (2.5) является система функций

$$\begin{aligned} C_{2i}^{(0)} P_{2i}^{(1/2)} (\sqrt{1-r^2}), \quad \sqrt{2} C_{2i}^{(k)} r^k P_{2i}^{(k+1/2)} (\sqrt{1-r^2}) \cos k\varphi, \\ \sqrt{2} C_{2i}^{(k)} r^k P_{2i}^{(k+1/2)} (\sqrt{1-r^2}) \sin k\varphi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Через ортонормированную систему (2.13) воспроизводящее ядро K_n выражается суммой

$$K_n(r \cos \varphi, r \sin \varphi; \varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (C_{2i}^{(0)})^2 P_{2i}^{(1/2)} (\sqrt{1-r^2}) P_{2i}^{(1/2)} (\sqrt{1-\varrho^2}) + \quad (2.14)$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2} \right]} (C_{2i}^{(k)})^2 r^k P_{2i}^{(k+1/2)} (\sqrt{1-r^2}) \varrho^k P_{2i}^{(k+1/2)} (\sqrt{1-\varrho^2}) \cos k(\varphi - \Theta),$$

где $[u]$ — наибольшее целое число, не превосходящее u .

Ядро (2.14) преобразуется в декартовы координаты, если положить

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad (2.15)$$

$$r^k \varrho^k \cos k(\varphi - \Theta) = u^k - \binom{k}{2} u^{k-2} v^2 + \binom{k}{4} u^{k-4} v^4 - \dots,$$

где

$$u = r\varrho \cos(\varphi - \Theta) = x\xi + y\eta, \quad (2.16)$$

$$v = r\varrho \sin(\varphi - \Theta) = y\xi - x\eta.$$

Для ультрасферических полиномов четных степеней $P_{2i}^{(k+1/2)}(x)$ легко получить [7] рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} P_0^{(k+1/2)} &\equiv 1, \quad P_2^{(k+1/2)}(x) = \frac{(2k+1)(2k+3)}{2} x^2 - \frac{2k+1}{2}, \\ P_{2i}^{(k+1/2)}(x) &= \frac{2k+4i-1}{(2i-1)2i} \left\{ \left((2k+4i-3)x^2 - (2i-2) \frac{2k+2i-2}{2k+4i-5} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2i-1) \frac{2k+2i-1}{2k+4i-1} \right) P_{2i-2}^{(k+1/2)}(x) - \frac{(2k+2i-2)(2k-2i-3)}{2k+4i-5} P_{2i-4}^{(k+1/2)}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

На основании (2.14)–(2.17) нетрудно последовательно построить воспроизводящие ядра K_1, K_2, \dots . Приведем для первых трех из них явные выражения как в полярных, так и в декартовых координатах.

$$K_1 = 1 + 3r\rho \cos(\varphi - \Theta),$$

$$K_2 = 6 - \frac{15}{2}(r^2 + \rho^2) + \frac{45}{4}r^2\rho^2 + 3r\rho \cos(\varphi - \Theta) + \frac{15}{4}r^2\rho^2 \cos 2(\varphi - \Theta),$$
(2.18)

$$K_3 = 6 - \frac{15}{2}(r^2 + \rho^2) + \frac{45}{4}r^2\rho^2 + \left(45r\rho - \frac{105}{2}(r^3\rho + r\rho^3) + \frac{525}{8}r^3\rho^3\right) \cos(\varphi - \Theta) + \frac{15}{4}r^2\rho^2 \cos 2(\varphi - \Theta) + \frac{35}{8}r^3\rho^3 \cos 3(\varphi - \Theta).$$

$$K_1 = 1 + 3(x\xi + y\eta),$$

$$K_2 = 6 + 3(x\xi + y\eta) - \frac{15}{2}(x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + 15(x^2\xi^2 + y^2\eta^2) + \frac{15}{2}(x^2\eta^2 + y^2\xi^2) + 15xy\xi\eta,$$
(2.19)

$$K_3 = 6 + 45(x\xi + y\eta) - \frac{15}{2}(x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) + 15(x^2\xi^2 + y^2\eta^2) + \frac{15}{2}(x^2\eta^2 + y^2\xi^2) + 15xy\xi\eta - \frac{105}{2}(x\xi^3 + y\eta^3 + x^3\xi + y^3\eta) - \frac{105}{2}(x\xi\eta^2 + y\xi^2\eta + xy^2\xi + x^2y\eta) + 70(x^3\xi^3 + y^3\eta^3) + 105(xy^2\xi\eta^2 + x^2y\xi^2\eta) + \frac{105}{2}(x^3\xi\eta^2 + y^3\xi^2\eta + xy^2\xi^3 + x^2y\eta^3).$$

Замечание. По ходу построения воспроизводящего ядра (2.14) мы построили систему ортонормированных полиномов двух переменных (2.13), соответствующую скалярному произведению, порождаемому мерой (2.1). Примененный при этом метод построения ортонормированной системы полиномов может быть, очевидно, использован и при других ротатабельных, т. е. зависящих только от $r^2 = x^2 + y^2$, мерах. Тогда вместо полиномов $P_{2i}^{(h+1/2)}(\sqrt{1-r^2})$ получаем в (2.13) лишь другие полиномы. В связи с этим отметим, что иные способы построения ортогональных на единичном круге полиномов по мере (2.1) предложены в [8, 9]. Использованный нами метод дает, однако, эти ортогональные полиномы в более удобной для построения и исследования воспроизводящего ядра форме.

3. Построение квадратурной формулы

Для получения несмещенной оценки методом воспроизводящих ядер необходимо, кроме воспроизводящего ядра, построить еще квадратурную формулу, точную для единичного круга по мере (2.1) для всех алгебраических полиномов степени $2n$. При этом желательно, чтобы квадратурная формула имела по возможности меньше узлов и чтобы ее коэффициенты возможно меньше отличались друг от друга. В полярных координатах одну такую формулу можно получить как прямое произведение [10] двух формул наивысшей степени точности соответственно для алгебраических и тригонометрических полиномов.

Пусть $p_{2n}(x, y)$ — любой алгебраический полином степени $2n$. Тогда в полярных координатах

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} p_{2n}(x, y) \frac{dx dy}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^1 \pi_{2n}(r) \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (3.1)$$

где

$$\pi_{2n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_{2n}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \quad (3.2)$$

является четным алгебраическим полиномом степени $2n$ [11].

При фиксированном r подынтегральная функция в (3.2) является алгебраическим полиномом степени $2n$ относительно $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и, следовательно, тригонометрическим полиномом степени $2n$. Соответствующая квадратурная формула с наименьшим числом узлов имеет $2n + 1$ узлов, и все ее коэффициенты равны [10]:

$$\pi_{2n}(r) = \frac{1}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} p_{2n}(r \cos \varphi_s^{(n)}, r \sin \varphi_s^{(n)}), \quad (3.3)$$

где

$$\varphi_s^{(n)} = \varphi_0^{(n)} + \frac{2\pi}{2n+1} s, \quad s = 0, 1, \dots, 2n, \quad (3.4)$$

а φ_0 — произвольное, $0 \leq \varphi_0 < \frac{2\pi}{2n+1}$.

Интеграл (3.1) преобразуется заменой $v = \sqrt{1-r^2}$ и с учетом четности $\pi_{2n}(r)$ в

$$\int_0^1 \pi_{2n}(r) \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \pi_{2n}(\sqrt{1-v^2}) dv, \quad (3.5)$$

где $\pi_{2n}(\sqrt{1-v^2})$ — четный полином степени $2n$ от v . Для интеграла в правой части (3.5) применяем квадратурную формулу Гаусса с $n+1$ узлами. Так как эти узлы расположены симметрично относительно начала координат, соответствующие веса равны и подынтегральная функция четная, то в случае четного n получим квадратурную формулу для (3.5) с $\frac{n}{2} + 1$ узлами, а в случае нечетного n — с $\frac{n+1}{2}$ узлами. Если эту формулу написать в виде

$$\int_0^1 \pi_{2n}(r) \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sum_{t=1}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} A_t^{(n+1)} \pi_{2n}(r_t^{(n)}), \quad (3.6)$$

то

$$r_t^{(n)} = \sqrt{1 - (v_t^{(n+1)})^2}, \quad t = 1, 2, \dots, \left[\frac{n+2}{2}\right], \quad (3.7)$$

где $v_1^{(n+1)}, v_2^{(n+1)}, \dots, v_{\left[\frac{n+2}{2}\right]}^{(n+1)}$ — все $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ неотрицательных корней полинома Лежандра $P_{n+1}(v)$ степени $n+1$ в убывающем порядке и

$A_t^{(n+1)}$ — соответствующие коэффициенты Кристоффеля, кроме $A_{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}^{(n+1)}$ при четном n (коэффициента при $\pi_{2n}(1)$), который получается из соответствующего коэффициента Кристоффеля умножением на $1/2$. Очевидно,

$$\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} A_t^{(n+1)} = 1, \quad A_t^{(n+1)} > 0. \quad (3.8)$$

Для (3.1), таким образом, имеем квадратурную формулу

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} p_{2n}(x, y) \frac{dx dy}{2\pi \sqrt{1-x^2-y^2}} = \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{2n} \frac{A_t^{(n+1)}}{2n+1} p_{2n}(x_{st}^{(n)}, y_{st}^{(n)}), \quad (3.9)$$

где

$$x_{st}^{(n)} = r_t^{(n)} \cos \varphi_s^{(n)}, \quad y_{st}^{(n)} = r_t^{(n)} \sin \varphi_s^{(n)}, \quad (3.10)$$

а $r_t^{(n)}$ и $\varphi_s^{(n)}$ определены формулами (3.7) и (3.4). Значения $r_t^{(n)}$ и $c_t^{(n)} = A_t^{(n+1)}/(2n+1)$ для $n=1, 2, \dots, 8$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$n=1$		$n=2$	
$r_1 = 0,816\ 497$	$c_1 = 0,333\ 333$	$r_1 = 0,632\ 455$	$c_1 = 0,111\ 111$
		$r_2 = 1$	$c_2 = 0,088\ 889$
$n=3$		$n=4$	
$r_1 = 0,508\ 374$	$c_1 = 0,049\ 694$	$r_1 = 0,422\ 893$	$c_1 = 0,026\ 325$
$r_2 = 0,940\ 432$	$c_2 = 0,093\ 163$	$r_2 = 0,842\ 645$	$c_2 = 0,053\ 181$
		$r_3 = 1$	$c_3 = 0,031\ 605$
$n=5$		$n=6$	
$r_1 = 0,361\ 249$	$c_1 = 0,015\ 575$	$r_1 = 0,314\ 731$	$c_1 = 0,009\ 960$
$r_2 = 0,750\ 201$	$c_2 = 0,032\ 797$	$r_2 = 0,670\ 918$	$c_2 = 0,021\ 516$
$r_3 = 0,971\ 113$	$c_3 = 0,042\ 538$	$r_3 = 0,913\ 942$	$c_3 = 0,029\ 372$
		$r_4 = 1$	$c_4 = 0,016\ 075$
$n=7$		$n=8$	
$r_1 = 0,279\ 004$	$c_1 = 0,006\ 749$	$r_1 = 0,250\ 331$	$c_1 = 0,004\ 781$
$r_2 = 0,604\ 419$	$c_2 = 0,014\ 825$	$r_2 = 0,548\ 682$	$c_2 = 0,010\ 626$
$r_3 = 0,850\ 774$	$c_3 = 0,020\ 914$	$r_3 = 0,789\ 795$	$c_3 = 0,015\ 330$
$r_4 = 0,983\ 032$	$c_4 = 0,024\ 179$	$r_4 = 0,945\ 970$	$c_4 = 0,018\ 373$
		$r_5 = 1$	$c_5 = 0,009\ 713$

Формула (3.9) имеет при четном n $N = n^2 + \frac{5}{2}n + 1$ узлов и при нечетном n $N = n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$ узлов. Так как полином двух переменных степени n имеет $N_0 = \binom{n+2}{2}$ членов, то N_0 является минимальным числом точек измерений, необходимым для оценки полинома степени n . Отношение N/N_0 — избыточность числа измерений — при чет-

ном n равно $2 - \frac{1}{n+1}$ и при нечетном n равно $2 - \frac{3n+2}{n^2+3n+2}$. В обоих случаях $N/N_0 < 2$.

4. Оценка полинома и ее дисперсия

Пусть теперь $f_n(x, y)$ — неизвестный полином двух переменных степени n и

$$z_{st} = f_n(x_{st}^{(n)}, y_{st}^{(n)}) + n_{st} \quad (4.1)$$

— результаты измерения его значений с аддитивными ошибками n_{st} в N узлах (3.10) квадратурной формулы (3.9). Предполагаем, что

$$\begin{aligned} Mn_{st} &= 0, \quad Mn_{st}^2 = \sigma^2/d_t \left[\frac{n+2}{2} \right], \quad \sum_{t=1}^{\left[\frac{n+2}{2} \right]} d_t = 1, \\ Mn_{st}n_{uv} &= 0, \quad \text{если } |s-u| + |t-v| > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Значения z_{st} , таким образом, равноточны на окружностях вокруг начала, а на разных окружностях точность распределена пропорционально величинам $d_t > 0$.

Оценка метода воспроизводящих ядер [1] полинома $f_n(x, y)$ получается из квадратурной формулы (3.9) заменой $p_{2n}(x_{st}^{(n)}, y_{st}^{(n)})$ на $K_n(x, y; x_{st}^{(n)}, y_{st}^{(n)}) z_{st}$:

$$\hat{f}_n(x, y) = \sum_{t=1}^{\left[\frac{n+2}{2} \right]} \sum_{s=0}^{2n} \frac{A_t^{(n+1)}}{2n+1} K_n(x, y; x_{st}^{(n)}, y_{st}^{(n)}) z_{st}. \quad (4.3)$$

Если

$$d_t = A_t^{(n+1)}, \quad (4.4)$$

что возможно в силу (3.8), то $\hat{f}_n(x, y)$ совпадает с оценкой наименьших квадратов [3] и

$$D\hat{f}_n(x, y) = \frac{\sigma^2}{N} k_n(r), \quad (4.5)$$

где

$$k_n(r) = K_n(x, y; x, y), \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.6)$$

Если же (4.4) не выполнено, то [3]

$$\begin{aligned} D\hat{f}_n(x, y) &= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{t=1}^{\left[\frac{n+2}{2} \right]} \frac{(A_t^{(n+1)})^2}{d_t} K^2(x, y; x_{st}^{(n)}, y_{st}^{(n)}) \leq \\ &\leq \frac{\sigma^2}{N} k_n(r) \max_t \frac{A_t^{(n+1)}}{d_t}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В частности, при равноточных измерениях, когда в (4.2) $Mn_{st}^2 = \sigma^2$ для всех s, t ,

$$D\hat{f}_n(x, y) \leq \frac{\sigma^2}{N} k_n(r) \left[\frac{n+2}{2} \right] \max_t A_t^{(n+1)}. \quad (4.8)$$

Если по равноточным измерениям в узлах (3.10) построить оценку $\tilde{f}_n(x, y)$ наименьших квадратов, то $D\tilde{f}_n(x, y) \leq D\hat{f}_n(x, y)$ при любых x, y , так что правая часть (4.8) является также оценкой сверху для дисперсии оценки наименьших квадратов по точкам (3.10).

Правые части (4.7) и (4.8) зависят от $k_n(r)$ и от $\left[\frac{n+2}{2} \right] \max_t A_t^{(n+1)}$.

Исследуем сперва $k_n(r)$. Из (2.14)

$$k_n(r) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (C_{2i}^{(0)} P_{2i}^{(1/2)})^2 (1-r^2)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2} \right]} (C_{2i}^{(k)} r^k P_{2i}^{(k+1/2)})^2 (1-r^2)^2. \quad (4.9)$$

Вычисляем $k_n(r)$ при $r=0$ и $r=1$. Так как по (2.11) $C_{2i}^{(0)} = \sqrt{4i+1}$ и, как известно [7], $P_{2i}^{(1/2)}(1) = 1$, то

$$k_n(0) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (4i+1) = \left(2 \left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right). \quad (4.10)$$

Труднее вычислить $k_n(1)$. На основании (2.17) легко получить

$$P_{2i}^{(k+1/2)}(0) = (-1)^i \frac{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+2i-1)}{2^{2i}(i)!}. \quad (4.11)$$

Несложное преобразование дает теперь

$$\left(C_{2i}^{(k)} P_{2i}^{(k+1/2)}(0) \right)^2 = \frac{4i+2k+1}{2^{4i+2k}} \binom{2i}{i} \binom{2i+2k}{i+k}. \quad (4.12)$$

Пусть $n=2l$. Тогда

$$\begin{aligned} k_n(1) - k_{n-1}(1) &= \frac{4l+1}{2^{4l}} \binom{2l}{l}^2 + 2 \frac{4l+1}{2^{4l}} \sum_{i=0}^{l-1} \binom{2i}{i} \binom{4l-2i}{2l-i} = \\ &= \frac{4l+1}{2^{4l}} \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} \binom{2i}{i} \binom{4l-2i}{2l-i} + \binom{2l}{l}^2 + \sum_{i=l+1}^{2l} \binom{2i}{i} \binom{4l-2i}{2l-i} \right\} = \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i}. \end{aligned}$$

Но [12]

$$\sum_{i=0}^n \binom{2i}{i} \binom{2n-2i}{n-i} = 2^{2n}. \quad (4.13)$$

Следовательно,

$$k_n(1) - k_{n-1}(1) = 2n+1. \quad (4.14)$$

Учитывая, что $k_1(1) = 4$, имеем при $n=2l$

$$k_n(1) = (n+1)^2. \quad (4.15)$$

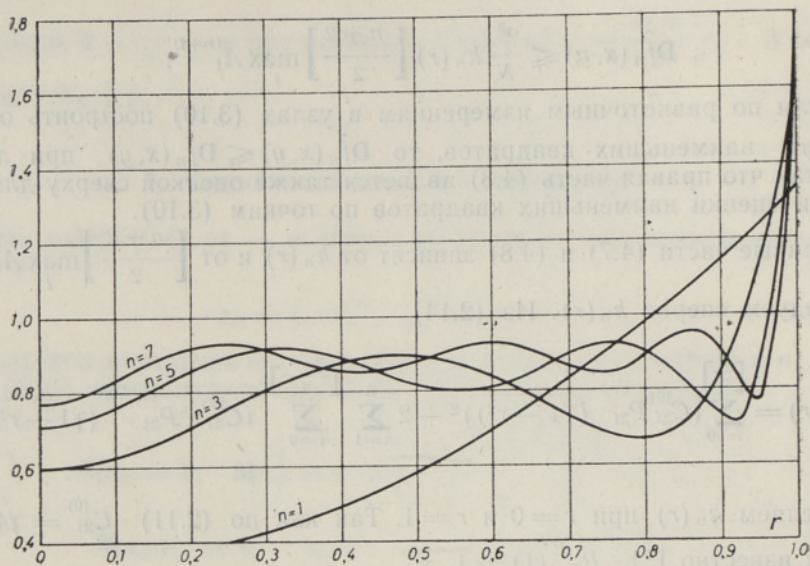


Рис. 1. Графики $k_n(r) / \binom{n+2}{2}$ на отрезке $0 \leq r \leq 1$ для $n = 1, 3, 5, 7$.

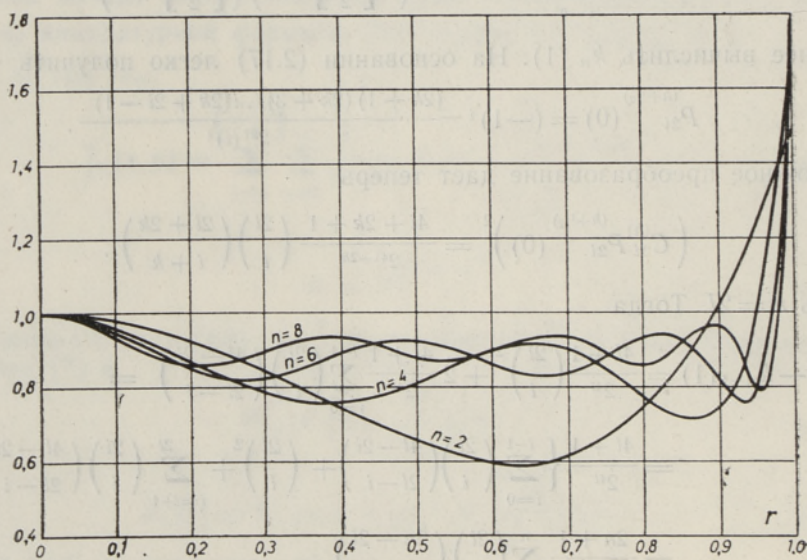


Рис. 2. Графики $k_n(r) / \binom{n+2}{2}$ на отрезке $0 \leq r \leq 1$ для $n = 2, 4, 6, 8$.

Аналогично доказывается (4.15) и в случае нечетного n .

На рис. 1 и 2 приведены графики $k_n(r) / \binom{n+2}{2}$ для $0 \leq r \leq 1$ при $n = 1, 2, \dots, 8$. Для этих n , очевидно $k_n(r)$ принимает свое максимальное на $0 \leq r \leq 1$ значение в точке $r = 1$. Для $n \leq 8$, следовательно,

$$\max_{0 \leq r \leq 1} k_n(r) = (n+1)^2. \quad (4.16)$$

Весьма правдоподобно, что (4.16) имеет место при любом n , но доказать это нам не удалось.

Величина $\max_{0 \leq r \leq 1} k_n(r)$ зависит от выбранной меры. Как известно [6], минимальное значение этой величины равно $\binom{n+2}{2}$ и достигается при определенных, зависящих от n мерах, сосредоточенных равномерно на окружностях $r = \text{const}$. Отношение

$$\mu_n = \binom{n+2}{2} / \max_{0 \leq r \leq 1} k_n(r) \quad (4.17)$$

— оптимальность меры (2.1) [3], по меньшей мере при $n \leq 8$, равно

$$\mu_n = \frac{n+2}{2n+2}. \quad (4.18)$$

Если (4.16) действительно имеет место при всех n , то $\mu_n \geq 1/2$ при всех n .

Качество рассматриваемой меры (2.1) для идентификации полиномов на единичном круге может быть, кроме оптимальности μ_n , еще охарактеризовано радиусом $\varrho^{(n)}$ такого круга, в котором

$$\max_{0 \leq r \leq \varrho^{(n)}} k_n(r) \leq \binom{n+2}{2}. \quad (4.19)$$

В табл. 2 приведены значения $\varrho^{(n)}$ для $n = 1, 2, \dots, 8$. Как видно, $\varrho^{(n)}$ довольно близко к 1 и возрастает при увеличении n .

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{n+2}{2}$	3	6	10	15	21	28	36	45
$k_n(0)$	1	6	6	15	15	28	28	45
$\max_{0 \leq r \leq 1} k_n(r)$	4	9	16	25	36	49	64	81
μ_n	0,7500	0,6667	0,6250	0,6000	0,5833	0,5714	0,5625	0,5556
$\varrho^{(n)}$	0,8164	0,8954	0,9315	0,9520	0,9645	0,9727	0,9783	0,9823
N	3	10	14	27	33	52	60	85
$N / \binom{n+2}{2}$	1,0000	1,6667	1,4000	1,8000	1,5714	1,8571	1,6667	1,8667
$\left[\frac{n+2}{2} \right] \max_t A_t^{(n+1)}$	1,0000	1,1111	1,3043	1,4359	1,4037	1,5273	1,4507	1,5617

Обратимся наконец ко второму множителю $\left[\frac{n+2}{2} \right] \max_t A_t^{(n+1)}$ в правой части (4.8). Значения этого множителя, определяющего эффективность [3] оценки метода воспроизводящих ядер, приведены для $n = 1, 2, \dots, 8$ в табл. 2. Но для него можно получить и асимптотическую оценку при $n \rightarrow \infty$. Именно, на основании асимптотической формулы Дарбу [7]

$$A_t^{(n+1)} \cong \frac{\pi}{n+1} r_t^{(n)}. \quad (4.20)$$

Учитывая, что $A_t^{(n+1)}$ (кроме последнего при четном n) образуют при фиксированном n возрастающую последовательность [7] и $\max_t r_t^{(n)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\left[\frac{n+2}{2} \right] \max_t A_t^{(n+1)} \cong \frac{\pi}{2}. \quad (4.21)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Петерсен И., Автоматика и телемеханика, № 6, 95 (1969).
2. Ароншайн Н., Математика, период. сб. переводов иностранных статей, 7, 2 (1963).
3. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 403 (1969).
4. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 410 (1969).
5. Kiefer J., Wolfowitz J., Ann. Math. Stat., 30, 271 (1959).
6. Kiefer J., Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 1, 381 (1961).
7. Сегё Г., Ортогональные многочлены, М., 1962.
8. Орлов Г., О некоторых полиномах с одной и многими переменными, СПб., 1881.
9. Агаханов С. А., Вестн. Ленингр. ун-та, № 19, Сер. Матем. Мех. Астр., вып. 4, 5 (1965).
10. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
11. Канторович Л. В., Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 28, 3 (1949).
12. Виленкин Н. Я., Комбинаторика, М., 1969.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/V 1969

I. PETERSEN

POLÜNOOMIDE IDENTIFITSEERIMINE RINGIL TAASTAVATE TUUMADE MEETODI ABIL

Uuritakse kahemuutuja n -astme polünoomi taastavate tuumade meetodi [1,3] nihi-tamata hinnangut ja selle dispersiooni ühikringil mõõdu (2.1) puhul. Leitakse n -astme polünoome mõõdu (2.1) suhtes taastava tuuma avaldis ning konstrueeritakse selle mõõdu järgi $2n$ -astme polünoomide täpne kvadratuurvale, mille sõlmede arv ei ületa mini-maalset vajalikku kahekordselt. Taastavate tuumade meetodi hinnangu dispersiooni mak-simum võrdtäpsete mõõtmiste korral selle kvadratuurvalemi sõlmedes ei ületa $n \leq 8$ rohkem kui 2,82-kordselt samale arvule mõõtmistele vastava vähimruutude hinnangu maksimaalset dispersiooni ühikringis mõõtepunktide mis tahes paigutuse puhul ühikringis ning mis tahes mõõtetäpsuste jaotuse puhul neis punktides.

I. PETERSEN

IDENTIFICATION OF POLYNOMIALS IN THE CIRCLE BY THE REPRODUCING KERNELS METHOD

The estimator of the reproducing kernels method [1,3] is investigated in the case of the measure (2.1) on the unit circle. The reproducing kernel for n -degree polynomials with regard to the measure (2.1) is found in explicit form and a $2n$ -degree quadrature formula is constructed with the number of points less than two times the necessary minimum. In the case of measurements of equal precision in the points of this quadrature formula, the dispersion of the corresponding estimator of the reproducing kernels method is shown if $n \leq 8$ to be not more than 2.82 times greater than the dispersion of any other estimator based on the same number of measurements in the unit circle with any location of these points and with any distribution of the relative precision in these points.