EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1
https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.1.02

Г. КАНГРО

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ ТАУБЕРОВЫХ УСЛОВИЙ

Недавно Квий [1], а также Мейер-Кёниг и Тийц [2] показали, что если условие $nu_n = o(1)$ является тауберовым для аддитивного регулярного метода A (в смысле сходимости), то условие Кронекера

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = o(n+1)$$

также тауберово для A (в смысле сходимости). Впоследствии Мейер-Кёниг и Тийц [3] рассматривали более общий случай, когда коэффициенты k в условии Кронекера заменены любыми числами $\lambda_k \uparrow \infty$. Возникают следующие вопросы: справедливы ли результаты Квий, Мейера-Кёнига и Тийца, если

1) вместо обыкновенной суммируемости рассматривать другие виды суммируемости (абсолютная суммируемость, суммируемость с заданной скоростью, сильная суммируемость и т. д.);

2) тауберовы условия $nu_n = o(1)$ соотв. $\lambda_n u_n = o(1)$ заменить более общими условиями (например, условиями $nu_n = O(1)$ соотв. $\lambda_n u_n = O(1)$);

3) рассматривать более общие тауберовы теоремы, при которых из тауберова условия и суммируемости методом A делается заключение о суммируемости методом B, более слабым, чем A.

Ниже на основании общих понятий метода суммирования и тауберова условия излагается общий подход к решению поставленных вопросов. С этой целью доказывается основная лемма, которая затем применяется к исследованию тауберовых условий для методов суммирования рядов, последовательностей и функций. Полученные три теоремы, условия которых формулируются в терминах множителей суммируемости, содержат как частные случаи результаты Мейера-Кёнига и Тийца.

1. Основная лемма

Уточним используемые в дальнейшем понятия метода суммирования и тауберова условия для него.

Пусть X — аддитивная группа и $У$ — произвольное множество. Каждый оператор

$$A : A^* \to У,$$

определенный на подмножестве $A^* \subset X$, будем называть **методом суммирования**, а область определения оператора A, т. е. A^*, — **полем суммируемости** метода A. При этом элемент $x \in A^*$ называем A-**суммируемым** к Ax. Метод A считаем **аддитивным** [1], если поле суммируемости A^* является подгруппой в X.

[1] Метод A аддитивный, если A^* определяется с помощью аддитивного преобразования.

Пусть на некоторой подгруппе $L \subset X$ задан оператор

$$S : L \to Y.$$

Метод A называем L-регулярным (относительно S), если[2]

$$A^* \supset L, \quad A \mid L = S.$$

В частности, если $L = B^*$ и $S = B$, где B — некоторый метод суммирования, то A является L-регулярным тогда и только тогда, когда $A^* \supset B^*$, $A \mid B^* = B$, т. е. когда A включает B и совместен с B.

Пусть $T_0 \subset X$ — некоторое подмножество группы X. Условие $x \in T_0$ будем называть L-тауберовым для метода A, если

$$A^* \cap T_0 \subset L, \quad A \mid T_0 = S \mid T_0.$$

Отметим, что условие $A \mid T_0 = S \mid T_0$ вытекает из условия $A^* \cap T_0 \subset L$, если A является L-регулярным. В частности, если $L = B^*$ и $S = B$, а A включает B и совместен с B, то условие $x \in T_0$ оказывается L-тауберовым тогда и только тогда, когда

$$A^* \cap T_0 \subset B^*.$$

Основной в дальнейшем является следующая лемма, дающая достаточное условие для того, чтобы условие $x \in T$, где $T \subset X$, было L-тауберовым для метода A, если условие $x \in T_0$ является L-тауберовым для A.

Лемма. *Пусть A — аддитивный L-регулярный метод суммирования. Если условие $x \in T_0$ является L-тауберовым для A, то условие $x \in T$ также L-тауберово для A, если каждый элемент $x \in T$ представим в виде*

$$x = y + z, \quad y \in T_0, \quad z \in L. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $x \in A^* \cap T$. Тогда по предположению справедливо разложение (1). В силу L-регулярности метода A имеем $L \subset A^*$ и, следовательно, $z \in A^*$. Поскольку $x \in A^*$, то из (1) вытекает $y \in A^*$ (так как A^* — подгруппа). Тем самым $y \in A^* \cap T_0$ и, поскольку условие $y \in T_0$ является L-тауберовым для A, то $y \in L$. Вследствие этого из (1) следует $x \in L$ и, следовательно, $A^* \cap T \subset L$. Ввиду L-регулярности метода A лемма доказана.

Будем применять леммы к методам суммирования рядов, последовательностей и функций.

2. Тауберовы условия для методов суммирования рядов

Пусть X — аддитивная группа всех рядов (с вещественными или комплексными членами); $L \subset X$ — ее подгруппа; $\varrho \subset X$ — произвольное подмножество, а r — множество последовательностей, соответствующее множеству ϱ, т. е.

$$r = \{(x_n) : \sum \bar{\Delta} x_n \in \varrho\},$$

где[3] $\bar{\Delta} x_n = x_n - x_{n-1}$ $(x_{-1} = 0)$. Числовая последовательность (ε_n) называется множителем суммируемости (для ряда) класса (ϱ, L), коротко $\varepsilon_n \in (\varrho, L)$, если из $\Sigma u_n \in \varrho$ вытекает $\Sigma\, \varepsilon_n u_n \in L$. Пусть, далее, μ_n — отличные от нуля числа такие, что $\bar{\Delta}\mu_n \neq 0$, а λ_n — числа, отличные от

---

[2] Символ $A \mid L$ означает сужение оператора A на L.

[3] Свободный индекс n везде принимает значения 0, 1, 2, ...

нуля при $n>0$. Соответственно каждому ряду Σu_n образуем последовательность (σ_n) с

$$\sigma_n = \frac{1}{\mu_n} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если A — аддитивный L-регулярный метод суммирования рядов и*[4]

$1^\circ \left(\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n}\right) \in (\varrho, L)$,

2° *условие* $\left(\frac{\lambda_n}{\overline{\Delta}\mu_n} u_n\right) \in r$ *является L-тауберовым для A, то условие*

$$(\sigma_n) \in r \tag{3}$$

также L-тауберово для A.

Доказательство. Из соотношения (2) при $\lambda_0 \neq 0$ находим

$$u_n = \frac{\overline{\Delta}(\mu_n \sigma_n)}{\lambda_n}$$

или

$$u_n = \frac{\overline{\Delta}\mu_n}{\lambda_n} \sigma_n + \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n} \overline{\Delta}\sigma_n. \tag{4}$$

В случае $\lambda_0 = 0$ из (2) следует $\sigma_0 = 0$ и, тем самым, $\overline{\Delta}\sigma_0 = \sigma_0 = 0$. Поэтому в случае $\lambda_0 = 0$ равенство (4) справедливо и при $n=0$, если положить $\frac{\overline{\Delta}\mu_0}{\lambda_0}\sigma_0 = u_0$, а значение частного $\frac{\mu_{-1}}{\lambda_0}$ выбрать произвольно. С помощью формальных рядов

$$x = \sum u_n, \quad y = \sum \frac{\overline{\Delta}\mu_n}{\lambda} \sigma_n, \quad z = \sum \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n} \overline{\Delta}\sigma_n$$

можем переписать соотношение (4) в виде

$$x = y + z.$$

Если условие (3) выполнено, то $\Sigma \overline{\Delta}\sigma_n \in \varrho$ и, с одной стороны, из 1° вытекает $z \in L$. С другой стороны, обозначив

$$T_0 = \left\{ \sum u_n : \left(\frac{\lambda_n}{\overline{\Delta}\mu_n} u_n\right) \in r \right\},$$

из определения ряда y заключаем, что $y \in T_0$. Согласно 2°, условие $x \in T_0$ является L-тауберовым для A. Утверждение теоремы 1 теперь следует из леммы, если положить

$$T = \{\sum u_n : (\sigma_n) \in r\}. \tag{5}$$

При $\lambda_n = n$, $\mu_n = n+1$ из теоремы 1 (если положить $\frac{\mu_{-1}}{\lambda_0} = 1$) вытекает

[4] При $\lambda_0 = 0$ частное $\frac{\mu_{-1}}{\lambda_0}$ можно выбрать произвольно.

Следствие 1. Пусть A — аддитивный L-регулярный метод суммирования рядов. Если $\varrho \subset L$ и условие $(nu_n) \in r$ является L-тауберовым для A, то условие (3) с $\sigma_n = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} ku_k$ также L-тауберово для A.

В частном случае, когда $L = \gamma$ (множество сходящихся рядов), $r = c_0$ (множество последовательностей, сходящихся к нулю) и, следовательно, $\varrho = \gamma_0$ (множество рядов, сходящихся к нулю), из следствия 1 получается основная теорема статьи [2] (теорема 1.1 статьи [3]).

Конкретизируя множества L и r, из теоремы 1 можем вывести разные следствия. Приводим два примера.

1) Согласно известной теореме Дедекинда—Адамара (см., напр., [4], с. 146) тогда и только тогда $(\varepsilon_n) \in (\gamma, \gamma)$ и, тем самым, $(\varepsilon_n) \in (\gamma_0, \gamma)$, когда $\sum |\Delta\varepsilon_n| < \infty$, где $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$, а $(\varepsilon_n) \in (\mu, \gamma)$ (μ — множество рядов с ограниченными частными суммами), когда, сверх того, $\varepsilon_n = o(1)$. Поэтому из теоремы 1 при $L = \gamma$, $r = c_0$ (соотв.[5] $r = m$) получается

Следствие 2. Пусть A — аддитивный γ-регулярный метод суммирования рядов. Если

$$1^\circ \ \sum \left| \Delta \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n} \right| < \infty \ \left(\text{соотв.} \ \sum \left| \Delta \frac{\mu_{n-1}}{\lambda_n} \right| < \infty, \ \mu_{n-1} = o(\lambda_n) \right),$$

2° условие $\lambda_n u_n = o(\overline{\Delta}\mu_n)$ (соотв. $\lambda_n u_n = O(\overline{\Delta}\mu_n)$) является γ-тауберовым для A,

то условие $\sigma_n = o(1)$ (соотв. $\sigma_n = O(1)$) также γ-тауберово для A.

Например, известно [3, 5], что условие

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\ln(k+1) \cdot u_k = o(n+1) \tag{6}$$

γ-тауберово для логарифмического метода (L). Поскольку условие $(n+1)\ln(n+1) \cdot u_n = O(1)$ оказывается γ-тауберовым для (L) (см. [6], с. 523), то из следствия 2 при $\lambda_n = (n+1)\ln(n+1)$, $\mu_n = n+1$ вытекает, что в условии (6) можно o заменить на O. Отметим, что в условии Кронекера нельзя заменить o на O даже для метода средних арифметических.

При $\lambda_n = n$, $\mu_n = n+1$ из следствия 2 вытекает теорема 2.1 статьи [3]. Пусть p_n — отличные от нуля[6] числа такие, что $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \neq 0$. Если в следствии 2 заменить λ_n на $\lambda_n p_n$, то при $\mu_n = P_n$ получается первая часть теоремы 3.3 статьи [3].

2) Пусть l — множество всех абсолютно сходящихся рядов и l_0 — множество рядов, абсолютно сходящихся к нулю. Нетрудно проверить, что $(\varepsilon_n) \in (l, l)$ и, тем самым, $(\varepsilon_n) \in (l_0, l)$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_n = O(1)$. Поэтому из теоремы 1 при[7] $L = l$, $r = a_0$ (множество последовательностей, абсолютно сходящихся к нулю) вытекает

Следствие 3. Пусть A — аддитивный l-регулярный метод суммирования рядов. Если

1° $\mu_{n-1} = O(\lambda_n)$,

---

[5] m — множество всех ограниченных последовательностей.

[6] Достаточно требовать выполнения условия $p_n \neq 0$ с некоторого значения n_0 индекса n.

[7] Разумеется $\varrho = l_0$.

2° условие[8] $\lambda_n u_n = a(\overline{\Delta}\mu_n)$ является l-тауберовым для A, то условие $\sigma_n = a(1)$ также l-тауберово для A.

Например, известно [7], что условие $nu_n = a(1)$ является l-тауберовым для абсолютной суммируемости по Абелю. При $\lambda_n = n$, $\mu_n = n+1$ из следствия 3 получается, что l-тауберовым для абсолютной суммируемости по Абелю также будет условие

$$\sum_{k=0}^{n} ku_k = a(n+1).$$

3. Тауберовы условия для методов суммирования последовательностей

Пусть X — аддитивная группа всех последовательностей (с вещественными или комплексными элементами); $L \subset X$ — ее подгруппа и $r \subset X$ — произвольное подмножество. Числовая последовательность (ε_n) называется множителем суммируемости (для последовательности) класса $[r, L]$, коротко $(\varepsilon_n) \in [r, L]$, если из $(x_n) \in r$ вытекает $(\varepsilon_n x_n) \in L$.

Теорема 2. *Если A — аддитивный L-регулярный метод суммирования последовательностей и*

1° $\left(\frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}}\right) \in [r, L]$,

2° $\left(\frac{\mu_n \overline{\Delta}\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}}\right) \in [r, r]$,

3° *условие* $(\lambda_n u_n) \in r$ *является L-тауберовым для A,*
то условие (3) *также L-тауберово для A.*

Доказательство. С помощью преобразования Абеля из (4) в случае $\lambda_0 \neq 0$ получаем[9]

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{\Delta}\mu_k}{\lambda_k}\sigma_k + \sum_{k=0}^{n} \Delta\frac{\mu_{k-1}}{\lambda_k}\sigma_k + \frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}}\sigma_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{\Delta}\mu_k}{\lambda_k}\sigma_k + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\Delta\mu_{k-1}}{\lambda_k} + \mu_k\Delta\frac{1}{\lambda_k}\right)\sigma_k + \frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}}\sigma_n,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \mu_k\Delta\frac{1}{\lambda_k}\cdot\sigma_k + \frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}}\sigma_n. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что (7) справедливо и при $\lambda_0 = 0$, если положить $\mu_0\Delta\frac{1}{\lambda_0}\cdot\sigma_0 = u_0$. С помощью последовательностей

$$x = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right), \quad y = \left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k\Delta\frac{1}{\lambda_k}\cdot\sigma_k\right), \quad z = \left(\frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}}\sigma_n\right)$$

[8] Запись $x_n = a(y_n)$ означает, что $x_n = o(y_n)$ и $\sum\left|\overline{\Delta}\frac{x_n}{y_n}\right| < \infty$.

[9] $\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$.

можем переписать соотношение (7) в виде

$$x = y + z.$$

Если условие (3) выполнено, то, с одной стороны, из 1° вытекает $z \in L$. С другой стороны, в силу 2°, можем написать

$$\left(\lambda_n \mu_n \Delta \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sigma_n \right) = \left(\frac{\mu_n \bar{\Delta} \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}} \sigma_n \right) \in r.$$

Следовательно, обозначив

$$T_0 = \{ (\sum_{k=0}^{n} u_k) : (\lambda_n u_n) \in r \},$$

имеем $y \in T_0$, причем, согласно 3°, условие $x \in T_0$ является L-тауберовым для A. Утверждение теоремы 2 теперь следует из леммы, если положить

$$T = \{ (\sum_{k=0}^{n} u_k) : (\sigma_n) \in r \}.$$

При $\lambda_n = n$, $\mu_n = n + 1$ из теоремы 2 получается аналог следствия 1 для метода суммирования последовательностей.

Пусть (φ_n) — некоторая последовательность положительных чисел и

$$\varphi = \{ (x_n) : \exists \lim_n \varphi_n x_n \},$$

$$\varphi_o = \{ (x_n) : \varphi_n x_n = o(1) \},$$

$$\varphi_O = \{ (x_n) : \varphi_n x_n = O(1) \}.$$

При $\varphi_n = 1$ имеем $\varphi = c$ (множество сходящихся последовательностей), $\varphi_o = c_0$, $\varphi_O = m$. Нетрудно проверить, что тогда и только тогда $(\varepsilon_n) \in [\varphi_o, \varphi_o]$, $(\varepsilon_n) \in [\varphi_o, \varphi]$ или $(\varepsilon_n) \in [\varphi_O, \varphi_O]$, когда $\varepsilon_n = O(1)$, а $(\varepsilon_n) \in [\varphi_O, \varphi]$, когда $\varepsilon_n = o(1)$. Поэтому из теоремы 2 при $L = \varphi$, $r = \varphi_o$ (соотв. $r = \varphi_O$) получается

Следствие 4. Пусть A — аддитивный φ-регулярный метод суммирования последовательностей. Если

1° $\mu_n = O(\lambda_{n+1})$ (соотв. $\mu_n = o(\lambda_{n+1})$),

2° $\mu_n \bar{\Delta} \lambda_{n+1} = O(\lambda_{n+1})$,

3° условие $\varphi_n \lambda_n u_n = o(1)$ (соотв. $\varphi_n \lambda_n u_n = O(1)$) является φ-тауберовым для A,

то условие $\varphi_n \sigma_n = o(1)$ (соотв. $\varphi_n \sigma_n = O(1)$) также φ-тауберово для A.

В случае $\varphi_n = 1$ следствие 4 дает при $\mu_n = n + 1$ теорему 2.3, а при $\mu_n = \lambda_n$ — теорему 3.2 статьи [3].

Если в теореме 2 положить $L = c$, $r = \varphi_o$ с $\varphi_n = n + 1$, $\mu_n = \lambda_n$ и λ_n заменить на $\lambda_n/(n+1)$, то получается теорема 3.1, а если положить $L = c$, $r = \varphi_o$ с $\varphi_n = 1/p_n$, $\mu_n = P_n/p_n$ и λ_n заменить на $\lambda_n p_n$, то — вторая часть теоремы 3.3 статьи [3].

Мейер-Кёниг и Тийц [3] доказали теорему 3.1, с тем, чтобы показать, что для логарифмического метода суммирования (L) условие Кауфмана [5]

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(k+1) \cdot u_k = O[\ln(n+1)]$$

является c-тауберовым, если условие Ишигуро [8]

$$(n+1)\ln(n+1)\cdot u_n = o(1)$$

считать c-тауберовым. Отметим, что последний факт непосредственно следует из теоремы 2 при $L=c$, $r=\varphi_o$ с $\varphi_n=n+1$, $\lambda_n=\ln(n+1)$ и $\mu_n=(n+2)\ln(n+2)$.

Пусть a — множество всех абсолютно сходящихся последовательностей. Нетрудно проверить (см., напр., [9], с. 257), что $(\varepsilon_n)\in[a, a]$ и, тем самым, $(\varepsilon_n)\in[a_0, a]$ тогда и только тогда, когда $\Sigma|\Delta\varepsilon_n|<\infty$. Поэтому из теоремы 2 при $L=a$, $r=a_0$ вытекает

Следствие 5. Пусть A — аддитивный a-регулярный метод суммирования последовательностей. Если

1° $\sum\left|\Delta\frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}}\right|<\infty$,

2° $\sum\left|\Delta\frac{\mu_n\overline{\Delta}\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}}\right|<\infty$,

3° условие $\lambda_n u_n = a(1)$ является a-тауберовым для A,

то условие $\sigma_n = a(1)$ также a-тауберово для A.

4. Тауберовы условия для методов суммирования функций

Пусть X — аддитивная группа функций (с вещественными или комплексными значениями), определенных на промежутке $[0, \infty)$ и имеющих ограниченное изменение на каждом сегменте $[0, b]$ с $b>0$; $L\subset X$ — подгруппа группы X и $r\subset X$ — произвольное подмножество. К группе X принадлежит, например, каждая функция вида

$$x(t)=\int_0^t u(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где функция u интегрируема по Лебегу на каждом сегменте $[0, b]$ с $b>0$. Функцию $\varepsilon\in X$ будем называть множителем суммируемости (для функции) класса $[r, L]$, коротко $\varepsilon\in[r, L]$, если из $x\in r$ вытекает $\varepsilon x\in L$.

Пусть, далее, $\lambda\in X$ — функция, непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0, \infty)$ и отличная от нуля при $t>0$, а μ — произвольная функция, определенная на промежутке $[0, \infty)$ и вместе с λ равная нулю. Образуем функцию

$$\sigma(t)=\frac{1}{\mu(t)}\int_0^t \lambda(\tau)\,dx(\tau), \tag{9}$$

где интеграл берется в смысле Римана—Стильтьеса.

Теорема 3. *Пусть A — аддитивный L-регулярный метод суммирования функций. Если L содержит все константы и*[10]

1° $\frac{\mu}{\lambda}\in[r, L]$,

2° $\frac{\mu\lambda'}{\lambda}\in[r, r]$,

[10] В случае $\lambda(0)=0$ частному $\mu(0)/\lambda(0)$ можно придать любое значение, отличное от нуля, а частному $\mu(0)\lambda'(0)/\lambda(0)$ — значение 0.

3° *условие*[11] $\lambda u \in r$ *является* L-*тауберовым для* A, *то условие* $\sigma \in r$ *также* L-*тауберово для* A.

Доказательство. Для произвольных $x \in X$ и $a > 0$ вычислим интеграл

$$x_a(t) = \int_a^t \frac{\mu(\tau)\lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau)}\sigma(\tau)\,d\tau \quad (t > 0). \tag{10}$$

Из (9) путем интегрирования по частям находим (см., напр., [10], с. 35)

$$\sigma(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\lambda(t)x(t) - \lambda(0)\,x(0) - \int_0^t x(\tau)\lambda'(\tau)\,d\tau\right], \tag{11}$$

откуда явствует, что $\mu\sigma \in X$ и, следовательно, $\mu\sigma$ интегрируема на каждом сегменте $[0, b]$ с $b > 0$. Вследствие этого интеграл (10) существует при любых $x \in X$ и $a > 0$, причем

$$x_a(t) = \int_a^t \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda(\tau)}x(\tau)\,d\tau - \lambda(0)\,x(0)\int_a^t \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau)}\,d\tau -$$

$$-\int_a^t \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau)}\,d\tau \int_0^\tau x(\alpha)\lambda'(\alpha)\,d\alpha.$$

Изменяя в повторном интеграле порядок интегрирования, получаем

$$x_a(t) = [C(a) + \lambda(0)x(0)]\left[\frac{1}{\lambda(t)} - \frac{1}{\lambda(a)}\right] + \frac{1}{\lambda(t)}\int_a^t x(\tau)\lambda'(\tau)\,d\tau,$$

где

$$C(a) = \int_0^a x(\tau)\lambda'(\tau)\,d\tau.$$

В силу (11) имеем

$$\int_a^t x(\tau)\lambda'(\tau)\,d\tau = \lambda(t)x(t) - \lambda(0)x(0) - \mu(t)\,\sigma(t) - C(a)$$

и, стало быть,

$$x_a(t) = x(t) - \frac{\mu(t)}{\lambda(t)}\sigma(t) - \frac{C(a) + \lambda(0)x(0)}{\lambda(a)} \quad (t > 0). \tag{12}$$

Нетрудно установить существование конечного предела

$$C = \lim_{a\to 0+}\frac{C(a) + \lambda(0)x(0)}{\lambda(a)}.$$

Действительно, если $\lambda(0) \neq 0$, то

$$C = x(0).$$

Если же $\lambda(0) = 0$, то, обозначив положительную и отрицательную части функции x соответственно через x^+ и x^-, с помощью теоремы о среднем значении находим

---

[11] Если x выражается формулой (8).

$$C(a) = \int_0^a x^+(\tau)\lambda'(\tau)\,d\tau - \int_0^a x^-(\tau)\lambda'(\tau)\,d\tau = (\mu_1 - \mu_2)\lambda(a),$$

где

$$\inf_{\tau\in[0,a]} x^+(\tau) \leqslant \mu_1 \leqslant \sup_{\tau\in[0,a]} x^+(\tau), \qquad \inf_{\tau\in[0,a]} x^-(\tau) \leqslant \mu_2 \leqslant \sup_{\tau\in[0,a]} x^-(\tau).$$

Не изменяя значение интеграла $C(a)$, можем положить $x(0) = x(0+)$. Тогда $\lim\limits_{a\to 0+}\mu_1 = x^+(0+)$, $\lim\limits_{a\to 0+}\mu_2 = x^-(0+)$ и, следовательно, при $\lambda(0) = 0$ имеем

$$C = \lim_{a\to 0+}\frac{C(a)}{\lambda(a)} = x(0+).$$

Тем самым из (12), в силу (10), вытекает

$$x(t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)\lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau)}\sigma(\tau)\,d(\tau) + \frac{\mu(t)}{\lambda(t)}\sigma(t) + C \quad (t > 0),$$

причем интеграл существует в смысле Лебега.[12] Поэтому для любой $x \in X$ имеем

$$x = y + z,$$

где

$$y(t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)\lambda'(\tau)}{\lambda^2(\tau)}\sigma(\tau)\,d\tau,$$

$$z(t) = \frac{\mu(t)}{\lambda(t)}\sigma(t) + C \quad (t > 0),\ z(0) = x(0),$$

причем $y \in X$, $z \in X$.

Теперь нетрудно свести доказательство теоремы 3 к лемме (аналогично доказательству теоремы 2), если положить[13]

$$T_0 = \{x \in X : x(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau, \lambda u \in r\},$$

$$T = \{x \in X : x(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau, \sigma \in r\}.$$

При $\lambda(t) = \mu(t) = t$ из теоремы 3 вытекает (если выбрать $\mu(0)/\lambda(0) = 1$)

Следствие 6. Пусть A — аддитивный L-регулярный метод суммирования функций, причем L содержит все константы. Если $r \subset L$ и условие $tu(t) \in r$ является L-тауберовым для A, то условие $\sigma \in r$, где

---

[12] Поскольку $\lambda \in X$ и $\mu\sigma \in X$, то в достаточно малом промежутке $(0, t)$ подынтегральная функция сохраняет знак.

[13] При $\lambda(0) = 0$ значение $\sigma(0)$ определяется соответственно выбору $\frac{\mu(0)}{\lambda(0)}$ так, чтобы имело место равенство $\frac{\mu(0)}{\lambda(0)}\sigma(0) + C = x(0)$.

$$\sigma(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau\, dx(\tau),$$

также L-тауберово для A.

Если

$$L = \{x \in X : \exists \lim_{t\to\infty} x(t)\}, \quad r = \{x \in X : \lim_{t\to\infty} x(t) = 0\},$$

то из следствия 6 получается теорема 4.1 статьи [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kwee B., Proc. Cambridge Philos. Soc., **63**, 1033 (1967).
2. Meyer-König W., Tietz H., Bull. Amer. Math. Soc., 73, 926 (1967).
3. Meyer-König W., Tietz H., Studia math., **31**, 205 (1968).
4. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
5. Кауфман Б. Л., Изв. высш. учебн. заведений, Матем., **1**, 57 (1967).
6. Давыдов Н. А., Матем. сб., 38, 509 (1956).
7. Hyslop J. M., J. London Math. Soc., **12**, 176 (1937).
8. Ishiguro K., Proc. Japan Acad., **39**, 156 (1963).
9. Кангро Г., Тыннов М., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **102**, 249 (1961).
10. Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса, М.—Л., 1936.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 20/VI 1969

G. KANGRO

TAUBERI TINGIMUSTE NÕRGENDAMISEST

Kwee [1], eriti aga Meyer-König ja Tietz [2,3] on näidanud, et igale ridade $\sum u_n$ regulaarsele aditiivsele summeerimismenetlusele A osutub tingimus $(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n} ku_k = o(1)$ Tauberi tingimuseks koonduvuse suhtes, kui aga $nu_n = o(1)$ on A jaoks Tauberi tingimus koonduvuse suhtes.

Antakse üldine meetod mingist Tauberi tingimusest uute (eriti nõrgemate) Tauberi tingimuste saamiseks. See meetod lubab käsitleda: 1) peale hariliku summeeruvuse ka absoluutset summeeruvust, tugevat summeeruvust jne.; 2) peale o-tingimuste ka O-tingimusi jt.; 3) peale Tauberi tingimuste koonduvuse suhtes ka Tauberi tingimusi mingi menetlusest A nõrgema menetluse suhtes.

Rakendusena vaadeldakse mõningaid Tauberi tingimusi ridade, jadade ja funktsioonide summeerimismenetluste kohta.

G. KANGRO

ÜBER DIE SCHWÄCHUNG DER TAUBER-BEDINGUNGEN

Kwee [1], insbesondere aber Meyer-König und Tietz [2,3] haben gezeigt, daß jedes reguläre aditive Verfahren A zur Summierung von Reihen $\sum u_n$ eine Tauber-Bedingung $(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n} ku_k = o(1)$ bezüglich der Konvergenz besitzt, falls nur $nu_n = o(1)$ eine Tauber-Bedingung für A bezüglich der Konvergenz ist. Es wird eine allgemeine Methode zum Ableiten neuer (insbesondere schwächerer) Tauber-Bedingungen aus einer gegebenen Tauber-Bedingung vorgeschlagen. Diese Methode ermöglicht: 1) außer der gewöhnlichen Summierbarkeit auch die absolute Summierbarkeit, starke Summierbarkeit usw.; 2) außer den o-Bedingungen auch die O-Bedingungen u. a.; 3) außer den Tauber-Bedingungen bezüglich der Konvergenz auch Tauber-Bedingungen bezüglich eines schwächeren Summierungsverfahrens zu behandeln. Als Anwendungen werden einige Tauber-Bedingungen für Reihen, Folgen und Funktionen untersucht.