where

$$\overset{\mu}{\sigma}_{n-r} = \bar{A}_{n-r+1}\,{}_{\mu}Z_r^{+} + {}_{\mu}A_{n-r+1} = \tilde{A}_{n-r}\,{}_{\mu}Z_{r+1}^{-} + \bar{A}_{n-r}\,{}_{\mu}Z_{r+1}^{+} + {}_{\mu}A_{n-r},$$

and due to

$$[\bar{A}_{n-r},\ {}_{\mu}Z_k^{\pm}] = [{}_{\mu}A_{n-r},\ {}_{\mu}Z_k^{\pm}] = 0$$

for every $k \leqslant r+1$, and

$$\tilde{A}_{n-r}\,{}_{\mu}Z_{r+1}^{-} + {}_{\mu}Z_{r+1}^{+}\tilde{A}_{n-r} = -{}_{\mu}A_{n-r},$$

also

$$\overset{\mu}{\sigma}_{n-r} = {}_{\mu}Z_{r+1}^{+}(-\tilde{A}_{n-r} + \bar{A}_{n-r}).$$

Here $\tilde{A}_{n-r}\,{}_{\mu}Z_{r-1}^{-}$ is the sum over all quantities ${}_{\mu}Q^{k_1 \ldots k_{s-1}\, r+1}$, and $\overset{\mu}{\sigma}_{n-r}$ is the sum over ${}_{\mu}Q$ and all ${}_{\mu}Q^{k_1 \ldots k_s}$ for $k_s \geqslant r+1$.

By $r = n-1$ we get then

$$\beta_{\mu}^{n\pm1} = \left(\frac{1}{2}\,{}_{\mu}Z_n^{+}\right)^{2\pm1} {}_{\mu}Y_{n-1}I_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,{}_{\mu}Z_n^{+}\right)^{1\pm1} {}_{\mu}Y_n I_{n-1}.$$

But $({}_{\mu}Z_n^{+})^2_{\mu}Y_n = 4\,{}_{\mu}Y_n$ and

$$\beta_{\mu}^{n+1} = \beta_{\mu}^{n-1}.$$

REFERENCES

1. Harish-Chandra, Phys. Rev., **71**, 793 (1947).
2. Кыйв М., Лойде К., Мейтре И., Тр. Таллинского политехн. ин-та, Сер. А, Тр. по физике (в печати).
3. Aurelia A., Umezawa H., Theory of high spin fields, University of Wisconsin-Milwaukee preprint (1968).

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Physics and Astronomy

Received
Sept. 29, 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.1.15

И. ПЕТЕРСЕН, К. ПУКК

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ РЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ В СФЕРЕ

I. PETERSEN, K. PUCK. KOLMANDA ASTME REGRESSIOONKATSETE OPTIMAALSEST PLANEERIMISEST SFÄÄRIS

I. PETERSEN, K. PUCK. ON THE OPTIMAL DESIGN OF THIRD DEGREE REGRESSION EXPERIMENTS IN THE SPHERE

Планы регрессионных экспериментов для оценки полинома третьей степени хорошо разработаны с точки зрения ротатабельного и композиционного планирования [1–9]. Однако в этих работах не был учтен основной параметр плана — максимальное значение дисперсии оценки полинома в области планирования. С другой стороны, в [10] вычислены оптимальные, в смысле минимакса дисперсии, непрерывные планы третьей степени для единичных сфер размерностей $q = 1, 2, \ldots$. Эти оптимальные планы присваивают вес 1 двум концентрическим сферам — единичной сфере и сфере определенного радиуса $\varrho_q < 1$, зависящего от размерности пространства. Относительный вес β_q сферы радиуса ϱ_q также изменяется вместе с q (см. таблицу). На обеих сферах распределение экспериментов должно быть равномерным в том смысле, что моменты этого распределения до шестого порядка включительно должны совпадать с моментами равномерного распределения.

Допустим, что для данного q известно N_q точек, таких, что взятые с одинаковыми весами они равномерно распределены в указанном выше смысле. Тогда оптимальный непрерывный план приближенно реализуется N_q точками на сфере радиуса ϱ_q и $(1 - \beta_q)N_q/\beta_q$ точками на единичной сфере, т. е. вообще N_q/β_q точками. По таблице видно, что коэффициент $1/\beta_q$ большой и быстро растет с увеличением q. Поэтому такие непрерывные планы не могут служить основой построения точных планов третьего порядка с приемлемыми количествами экспериментов.

В связи с этим интересен следующий вопрос: какой радиус $\bar{\varrho}_q$ внутренней сферы является оптимальным в смысле минимакса дисперсии при добавочном условии, что обе сферы имеют одинаковый вес, и насколько за счет этого условия увеличивается максимальное значение дисперсии оценки? Если увеличение не слишком большое, то соответствующий точный план, имеющий только $2N_q$ экспериментальных точек, может оказаться, по крайней мере, для небольших q, уже приемлемым для практического использования.

q	β_q	ϱ_q^2	$\bar{\varrho}_q^2$	$d_q(\bar{r}_q, \bar{\varrho}_q) / \binom{q+3}{3}$	$\bar{r}_q^2$
1	0,5000	0,2000	0,2000	1,0000	0,2000
2	0,3077	0,2657	0,5374	1,2566	0.0959
3	0,2455	0,2970	0,6496	1,3010	0,1453
4	0,1695	0,3142	0,7136	1,2971	0,1828
5	0,1241	0,3249	0,7559	1,2807	0,2097
6	0,0948	0,3321	0,7864	1,2619	0,2298
7	0,0749	0,3373	0,8096	1,2436	0,2452
8	0,0607	0,3412	0,8280	1,2268	0,2574
9	0,0502	0,3442	0,8429	1,2117	0,2674
10	0,0422	0,3465	0,8554	1,1982	0,2756
100	0,0006	0,3644	0,9815	1,0278	0,3552
∞	0	0,3660	1	1	1

Если эксперименты равномерно распределены на единичной сфере и на сфере радиуса ϱ и если на обеих сферах экспериментов одинаковое количество, то дисперсия оценки полинома третьей степени с q переменными на расстоянии r от центра сферы, согласно [10], пропорциональна величине

$$d_q(r, \varrho) = 2\frac{(1-r^2)^2 + (r^2-\varrho^2)^2}{(1-\varrho^2)^2} + 2q\frac{r^2(1-r^2)^2 + r^2\varrho^2(r^2-\varrho^2)^2}{\varrho^2(1-\varrho^2)^2} +$$

$$+ (q+2)(q-1)\frac{r^4}{1+\varrho^4} + \frac{(q+4)q(q-1)}{3}\frac{r^6}{1+\varrho^6}.$$

Поставленный вопрос сводится к задаче

$$\min_{0\leqslant\rho\leqslant 1}\max_{0\leqslant r\leqslant 1} d_q(r, \varrho) = d_q(\bar{r}_q, \bar{\varrho}_q).$$

Эта задача была решена на ЭВМ. Кроме $\bar{\varrho}_q$ и $\bar{r}_q$ вычислялись также отношения $d_q(\bar{r}_q, \bar{\varrho}_q) \Big/ \binom{q+3}{3}$, показывающие во сколько раз увеличивается минимаксная дисперсия вследствие условия равенства весов двух сфер. Результаты приведены в таблице.

Оказывается, что при $2 \leqslant q \leqslant 7$ максимальная дисперсия увеличивается на 5—30% за счет требования равенства весов на двух сферах, а при больших q это увеличение убывает к нулю. Но оптимальные радиусы ϱ_q и $\bar{\varrho}_q$ при $q > 1$ резко отличаются друг от друга. Если при $q \to \infty$ $\varrho_q \to 0{,}6050$, то $\bar{\varrho}_q \to 1$. Отметим также, что вследствие добавочного условия $\bar{\varrho}_q$ и $\bar{r}_q$ отличаются друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardiner D. A., Grandage A. H., Hader R. J., Ann. Math. Statistics, **30**, 1082 (1959).
2. Draper N. R., Ann. Math. Statistics, **31**, 865 (1960).
3. Draper N. R., Ann. Math. Statistics, **31**, 875 (1960).
4. Draper N. R., Ann. Math. Statistics, **32**, 910 (1961).
5. Thaker P. J., Das M. N., J. Indian Soc. Agric. Statistics, **13**, 218 (1961).
6. Draper N. R., Technometrics, **4**, 219 (1962).
7. Das M. N., Narasimham N. L., Ann. Math. Statistics, **33**, 1421 (1962).
8. Herzberg A. M., Ann. Math. Statistics, **35** (1964).
9. Nigram A. K., J. Indian Soc. Agric. Statistics, **19**, 36 (1967).
10. Farrell R. H., Kiefer J., Wolbran A., Proc. V Berkeley Symp. Prob. Statistics, **1**, 113 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/X 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1

П. СААРИ, Р. АВАРМАА

К ВОПРОСУ О ВРАЩАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ПРИМЕСНОЙ МОЛЕКУЛЫ NO_2^- В KCl

P. SAARI, R. AVARMAA. LISANDIMOLEKULI NO_2^- PÖÖRLEMISRELAKSATSIOONIST KRISTALLIS KCl

P. SAARI, R. AVARMAA. ON THE ROTATIONAL RELAXATION OF IMPURITY MOLECULE NO_2^- IN KCl CRYSTAL

В работе [1] было установлено, что в системе KCl-NO_2^- при гелиевых температурах люминесценция происходит из состояния, в котором не установилось тепловое равновесие по вращательным уровням примесной молекулы, т. е. скорость релаксации вращения мала по сравнению с временем жизни возбужденного электронного состояния.