ЛИТЕРАТУРА

1. Morgan H. W., Staats P. A., J. Appl. Phys., 33, 364 (1962).
2. Hisatsune I. C., Suarez N. H., Inorg. Chem., 3, 168 (1964).
3. Мауринг Т., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 17, 232 (1968).
4. Vaško A., Srb I., Czech. J. Phys., B 17, 1110 (1967).
5. Герцберг Г., Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул, М., 1949.
6. Van der Elsken J., Kroon S. G., J. Chem. Phys., 41, 3451 (1964).
7. Decius J. C., Jakobson J. L., Sherman W. F., Wilkinson G. R., J. Chem. Phys., 43, 2180 (1965).
8. Seward W. D., Narayanamurti V., Phys. Rev., 148, 463 (1966).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/V 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.1.13

Л. АЙНОЛА

МОДИФИКАЦИЯ ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА—ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

L. AINOLA. HAMILTONI-OSTROGRADSKI PRINTSIIBI MODIFIKATSIOON ALGVÄÄRTUSÜLESANNETE JAOKS

L. AINOLA. THE MODIFICATION OF HAMILTON-OSTROGRADSKY'S PRINCIPLE FOR INITIAL VALUE PROBLEMS

В классической постановке принцип Гамильтона—Остроградского применим для задач движения механических систем, положение которых известно в конце рассматриваемого интервала времени [1–4]. В последнее время опубликован ряд работ, в которых приводятся вариационные формулировки и для задач с начальными условиями [5–8]. В случае линейных задач [5–7] соответствующие функционалы составляются при помощи свертки, а для нелинейных случаев [8] в формулировку вариационной задачи дополнительно вводятся переменные некоторой присоединенной задачи. Таким образом представленные принципы действительно являются вариационными принципами, позволяющими задачи механики приводить к вариационным задачам.

Недавно в работе [9] сделана попытка сформулировать задачи механики с начальными условиями при помощи интегрального принципа, т. е. при помощи выражения, содержащего вариации, но не допускающего приведение к вариационной задаче. В настоящей заметке рассматривается этот же вопрос. Дается более корректная формулировка интегрального принципа механики для задач с начальными условиями и выясняется его взаимоотношение с методом Галеркина.

Рассмотрим голономную систему, уравнения движения которой имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad (i=1,\ldots,n). \tag{1}$$

Начальные условия задачи выбираем в виде

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \quad p_i(t_0) = p_{i0}. \tag{2}$$

Здесь L — функция Лагранжа, $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Предложенный в работе [9] интегральный принцип, если его выписать для задачи (1)—(2), имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t} L\,dt + \sum_{i=1}^{n} \{-p_i(t)\,\delta q_i(t) + p_{i0}\delta q_i(t_0) + \\ + [q_i(t_0) - q_{i0}]\,\delta p_i(t_0)\} = 0. \tag{3}$$

После варьирования первого члена и интегрирования по частям получается

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\,dt + \sum_{i=1}^{n} \{-[p_i(t_0) - p_{i0}]\,\delta q_i(t_0) + \\ + [q_i(t_0) - q_{i0}]\,\delta p_i(t_0)\} = 0. \tag{4}$$

На основе этого выражения в работе [9] утверждается, что принцип (3) является вариационной формулировкой уравнений (1) и начальных условий (2). Но легко видеть, что начальные условия в принципе (3) так связаны между собой, что если одни из них удовлетворены, то другие не получаются естественными условиями из принципа (3). Например, если выполняются первые из начальных условий (2), то

$$\delta q_i(t_0) = 0 \tag{5}$$

и для удовлетворения уравнения (4) вторые из условий (2) могут не выполняться.

Все же задача (1)—(2) может быть сформулирована в виде интегрального принципа, если начальные условия (2) рассматривать как дополнительные условия, которые удовлетворяются предварительно.

Сформулируем интегральный принцип в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t} L\,dt - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,\delta q_i(t) = 0 \tag{6}$$

и покажем, что из него при дополнительных условиях (2) следуют уравнения движения (1).

Действительно, если провести варьирование первого члена уравнения (6) и учитывать условие (5), то получим

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\,dt = 0. \tag{7}$$

Так как вариации δq_i произвольны, из равенства (7) вытекают уравнения (1).

Легко видеть, что если интегральный принцип (6) применить для приближенного решения задачи (1)—(2) методом Ритца, то это приведет к такому же результату, что и непосредственное применение метода Галеркина к решению этой задачи.

Если примем, что

$$\tilde{q}_i(t) = \varphi_{i0}(t) + \sum_{s=1}^{k} c_s \varphi_{is}(t), \tag{8}$$

где заданные функции φ_{i0}, φ_{is} удовлетворяют соответственно начальным условиям (2) и аналогичным однородным начальным условиям, то получим, что неизвестные коэффициенты c_s определяются в обоих случаях из следующей системы алгебраических уравнений

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L(t, \tilde{q}, \tilde{q}^{\cdot})}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, \tilde{q}, \tilde{q}^{\cdot})}{\partial \dot{q}_i} \right) \varphi_{is}\, dt = 0. \tag{9}$$

$$(s = 1, \ldots, k).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Полак Л. С., Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике, М., 1960.
2. Вариационные принципы механики, М., 1959.
3. Ланцош К., Вариационные принципы механики, М., 1960.
4. Yourgrau W., Mandestam S., Variational Principles in Dynamic and Quantum Theory, London, 1960.
5. Gurtin M. F., Quart. Appl. Math., 22, No. 3, 252 (1964).
6. Айнола Л. Я., ПММ, 30, вып. 5, 946 (1966).
7. Айнола Л. Я., Инж. ж., МТТ, № 5, 159 (1966).
8. Айнола Л. Я., Инж. ж., МТТ, № 2, 87 (1967).
9. Tiersten H. F., J. Math. Phys., 9, No. 9, 1445 (1968).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
3/X 1969

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 1

M. KÕIV

HARISH-CHANDRA MATRICES FOR ARBITRARY SPIN

M. KÕIV. HARISH-CHANDRA MAATRIKSID MEELEVALDSE SPINI KORRAL.
М. КЫЙВ. МАТРИЦЫ ХАРИШ-ЧАНДРА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Although Harish-Chandra in his well-known paper [1] investigated the equations for particles with any spin in the form of $(\beta_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$, where $\beta_\mu^{2s+1} = \beta_\mu^{2s-1}$, no explicit constructions of matrices for arbitrary spin are known. An attempt to find such a construction in Dirac matrices has been made in the present paper. We start from the Bargmann-Wigner equation in the form of [2] and obtain an explicit formula of β_μ for spin $\frac{n}{2}$.

In the previous paper [2], we investigated the Rarita-Schwinger and Bargmann-Wigner equations from the point of view of the $O(5)$-group. It turned out that, together with the spin eigenvalue problem, these equations