EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.1.06

*Л. АЙНОЛА*

# ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Смешанная задача для волнового уравнения в промежутке времени $(0, \tau)$ формулируется в виде вариационной задачи. Из соответствующего функционала с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру $\tau$ выводятся две бесконечные последовательности функционалов для рассматриваемой задачи.

Найденные вариационные принципы применяются для вывода общих формул — закона взаимности и одного варианта формулы Грина.

## 1. Введение

Вариационные методы для статических задач, приводящих к краевым задачам для уравнений математической физики, хорошо разработаны [1]. Для динамических задач до последнего времени применялась только вариационная формулировка в виде вариационного принципа Гамильтона—Остроградского [2, 3]. Этот принцип применим, если задача динамики сформулирована так, что заданы условия в начале и конце рассматриваемого интервала времени. Однако задачи динамики в большинстве случаев представлены так, что они приводят к смешанным задачам для уравнений математической физики. Вариационным методам для последней задачи посвящено сравнительно мало работ.

В работах [4–7] приводятся вариационные принципы для линейных смешанных задач в случае волнового уравнения, уравнений теплопроводности, Шредингера и теории упругости. В этих работах применятся методика, по которой сначала дифференциальные уравнения в частных производных с помощью интегрирования по времени приводятся к интегро-дифференциальным уравнениям. Вариационные принципы формулируются для последних уравнений, при этом применяются интегралы свертки.

В работах [8–10] вариационный метод, сводящийся к минимизации квадратичного функционала, распространяется на несамосопряженные уравнения с дифференциальными операторами, симметричными и положительными относительно некоторого вспомогательного оператора.

Следует упомянуть еще группу работ, использующих метод, по которому вариационные принципы формулируются для некоторой расширенной задачи, состоящей из данной и присоединенной задачи [11–13]. Такие формулировки нашли главным образом применение в решении различных задач теории диффузии и переноса [14–17].

В статьях [18–20] автор дает вариационные формулировки непосредственно для смешанной задачи, не прибегая предварительно к преобразованию уравнений задачи или к расширению ее. В этих работах рассмотрены уравнения теории упругости, Шредингера и теплопроводности.

В настоящей работе приводится аналогичная вариационная формулировка для волнового уравнения. Причем, в отличие от работ [18–20], для вывода вариационной задачи здесь применяется общая методика [21], базирующаяся на методе множителей Лагранжа.

Показывается, что из соответствующего функционала можно получить с помощью дифференцирования и интегрирования две последовательности функционалов, приводящие к двум последовательностям вариационных принципов смешанной задачи для волнового уравнения. Такая возможность формулировки вариационного принципа в различных видах особенно полезна при образовании вариационных принципов для таких задач математической физики, где взаимодействуют несколько полей.

Далее показывается, что на основе представленных вариационных принципов можно получить ряд общих результатов для волнового уравнения, представляющих самостоятельный интерес. Так, с помощью этих принципов выводятся формулы для волнового оператора, являющиеся аналогами формулы Грина для оператора Лапласа.

## 2. Основной вариационный принцип

Рассмотрим волновое уравнение

$$\nabla^2 u - u^{\cdot\cdot} = F(P, t), \quad P \in \Omega, \quad 0 < t < \tau \tag{2.1}$$

при краевом условии

$$u = f(P, t), \quad P \in S, \quad 0 < t < \tau \tag{2.2}$$

и при начальных условиях

$$u = \varphi_0(P), \quad u^{\cdot} = \varphi_1(P), \quad P \in \Omega, \quad t = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $P$ — точка в трехмерном пространстве с декартовыми координатами $x, y, z$; $\Omega$ — ограниченная область пространства переменных $(x, y, z)$; $S$ — граничная поверхность области $\Omega$. Точкой обозначаются производные по аргументу $t$.

Построим функционал, условиями стационарности которого будут волновое уравнение (2.1) и краевое и начальные условия (2.2), (2.3), используя следующий общий принцип [22]: если функционал $I(u, v, \ldots)$ при заданных условиях непрерывности и добавочных условиях достигает стационарного значения для некоторой системы функции $u, v, \ldots$ и если эта система функций удовлетворяет некоторым соотношениям, то функционал $I$ остается стационарным для этой системы функций также и в том случае, если одно или несколько из этих соотношений заранее присоединить к добавочным условиям задачи.

Итак, рассмотрим линейный функционал

$$I(u) = \int_0^\tau \int_\Omega G u \, d\Omega dt - \int_\Omega [\psi_1 u(P, \tau) + \psi_0 u^{\cdot}(P, \tau)] d\Omega + \\ + \int_0^\tau \int_S g \nabla u \cdot \mathbf{n} dS dt \tag{2.4}$$

и предположим, что он имеет стационарное значение при функции, удовлетворяющей уравнению (2.1) и условиям (2.2), (2.3).

Здесь $G(P, t)$, $g(P, t)$, $\psi_0(P)$, $\psi_1(P)$ — некоторые пока произвольно заданные функции. Теперь по приведенному принципу функционал (2.4) остается стационарным для функции $u$ и в том случае, если условия (2.1) — (2.3) присоединить к добавочным условиям задачи.

Введя методом множителей Лагранжа дополнительные условия (2.1) — (2.3) в функционал (2.4), имеем

$$I = \int_0^\tau \int_\Omega [Gu - \lambda(\nabla^2 u - u^{\cdot\cdot} - F)] d\Omega\, dt -$$

$$- \int_\Omega \{\psi_1 u(P, \tau) + \psi_0 u^{\cdot}(P, \tau) + \mu [u(P, 0) - \varphi_0] +$$

$$+ \nu [u^{\cdot}(P, 0) - \varphi_1]\} d\Omega + \int_0^\tau \int_S [g \nabla u \quad \mathfrak{n} - \varrho (u - f)] dS\, dt, \qquad (2.5)$$

где $\lambda(P, t)$, $\varrho(P, t)$, $\mu(P)$, $\nu(P)$ — множители Лагранжа.

Первая вариация функционала (2.5) после применения формулы Остроградского может быть представлена в виде

$$\delta I = - \int_0^\tau \int_\Omega [(\nabla^2 u - u^{\cdot\cdot} - F) \delta\lambda + (\nabla^2 \lambda - \lambda^{\cdot\cdot} - G) \delta u] d\Omega\, dt -$$

$$- \int_\Omega \{ (\lambda \delta u^{\cdot} - \lambda^{\cdot} \delta u)_{t=0}^{t=\tau} + \psi_1 \delta u (P, \tau) + \psi_0 \delta u^{\cdot} (P, \tau) +$$

$$+ [u(P, 0) - \varphi_0] \delta\mu + \mu \delta u (P, 0) + [u^{\cdot}(P, 0) - \varphi_1] \delta\nu + \nu \delta u^{\cdot} (P, 0)\} d\Omega -$$

$$- \int_0^\tau \int_S [(\lambda - g) \mathfrak{n} \cdot \delta \nabla u - (\mathfrak{n} \cdot \nabla \lambda - \varrho) \delta u + (u - f) \delta \varrho] dS\, dt. \qquad (2.6)$$

Вариация $\delta I$ равняется нулю, если функция $u$ является решением задачи (2.1) — (2.3), множитель Лагранжа $\lambda$ удовлетворяет следующим уравнению и соотношениям:

$$\nabla^2 \lambda - \lambda^{\cdot\cdot} - G = 0, \quad P \in \Omega, \quad 0 < t < \tau, \qquad (2.7)$$

$$\lambda - g = 0, \quad P \in S, \quad 0 < t < \tau, \qquad (2.8)$$

$$\lambda - \psi_0 = 0, \quad \lambda^{\cdot} + \psi_1 = 0, \quad P \in \Omega, \quad t = \tau \qquad (2.9)$$

и остальные множители Лагранжа определяются соотношениями

$$\mathfrak{n} \cdot \nabla \lambda - \varrho = 0, \qquad P \in S, \quad 0 < t < \tau, \qquad (2.10)$$

$$\lambda + \nu = 0, \quad \lambda^{\cdot} - \mu = 0, \qquad P \in \Omega, \quad t = 0. \qquad (2.11)$$

Выбирая произвольные функции $G$, $g$, $\psi_0$, $\psi_1$ подходящим образом, можно привести присоединенную задачу (2.7) — (2.9) к виду, совпадающему с видом задачи (2.1) — (2.3). Легко видеть, что это достигается, если взять

$$G(P, \tau - t) = F(P, t), \qquad g(P, \tau - t) = f(P, t),$$
$$\psi_0 = \varphi_0, \qquad \psi_1 = \varphi_1. \qquad (2.12)$$

В этом случае

$$\lambda(P, t) = u(P, \tau - t). \qquad (2.13)$$

Учитывая соотношения (2.12), (2.13), (2.10), (2.11), функционалу (2.5) можно придать вид

$$I = \int_{\Omega} \{\nabla u * \nabla u + u^{\cdot} * u^{\cdot} + 2F * u + 2[u(P, 0) - \varphi_0] u^{\cdot}(P, \tau) -$$

$$- 2\varphi_1 u(P, \tau)\} d\Omega - 2 \int_{S} (u - f) * \nabla u \cdot \mathbf{n} dS. \tag{2.14}$$

Здесь использовано обычное обозначение для свертки по координате $t$:

$$A * B = \int_0^{\tau} A(P, \tau - t) B(P, t) dt. \tag{2.15}$$

Условиями стационарности функционала (2.14) являются только уравнение (2.1) и условия (2.2), (2.3).

Следовательно, имеет место следующий вариационный принцип: *решение волнового уравнения* (2.1) *в интервале* $(0, \tau)$ *аргумента* $t$ *при краевом условии* (2.2) *и начальных условиях* (2.3) *выделяется из всех рассматриваемых функций тем, что оно придает функционалу* (2.14) *стационарное значение.*

Если предположить, что варьируемые функции заранее удовлетворяют условиям (2.2), $(2.3_1)$, то функционал (2.14) примет простой вид:

$$I = \int_{\Omega} [\nabla u * \nabla u + u^{\cdot} * u^{\cdot} + 2F * u - 2\varphi_1 u(P, \tau)] d\Omega. \tag{2.16}$$

## 3. Модификация основного вариационного принципа

Функционал (2.14) содержит параметр $\tau$-координату конца рассматриваемого интервала времени, т. е.

$$I = I(u; \tau). \tag{3.1}$$

Учитывая, что первая вариация функционала $I$ равняется нулю при любом значении параметра $\tau > 0$, можно написать

$$\delta I(u; \tau) = \Phi(\tau) \equiv 0. \tag{3.2}$$

Так как функция $\Phi(\tau)$ тождественно равняется нулю, то равняются нулю и производные, и интегралы от нее

$$\frac{d^n \Phi}{d\tau^n} = 0, \quad \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} \Phi(\tau_n) d\tau_n = 0, \tag{3.3}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$\frac{d^n}{d\tau^n} \delta I = 0, \quad \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} \delta I(u; \tau_n) d\tau_n = 0. \tag{3.4}$$

Если учесть, что

$$\frac{d}{d\tau} \delta I = \delta \frac{dI}{d\tau}, \quad \int_0^{\tau} \delta I(u; \tau_1) d\tau_1 = \delta \int_0^{\tau} I(u; \tau_1) d\tau_1, \tag{3.5}$$

и обозначить

$$\frac{d^n I}{d\tau^n}=I^{(n)},\quad \int\limits_0^{\tau} d\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_0^{\tau_{n-1}} I(u;\tau_n)\,d\tau_n = I_{(n)}, \tag{3.6}$$

то из соотношения (3.4) вытекают две бесконечные последовательности вариационных принципов

$$\delta I^{(n)}=0,\quad \delta I_{(n)}=0,\quad (n=1,2,\ldots). \tag{3.7}$$

Приводим функционалы, соответствующие членам этих последовательностей.

Прежде всего представим формулу для дифференцирования свертки (2.15):

$$\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}(A * B)=\frac{\partial^n A}{\partial t^n} * B+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^{n-1-i}A(P,0)}{\partial t^{n-1-i}}\frac{\partial^i B(P,\tau)}{\partial t^i}. \tag{3.8}$$

Дифференцируя функционал (2.14) $n$ раз и используя формулу (3.8), имеем:

$$\begin{aligned} I^{(n)} = \int\limits_{\Omega} \{ & \nabla u * \nabla u^{(n)} + u^{(2)} * u^{(n)} + 2F * u^{(n)} + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} [u^{(n-1-i)}(P,0)\, u^{(i+2)}(P,\tau) + \nabla u^{(n-1-i)}(P,0) \nabla u^{(i)}(P,\tau) + \\ & + 2u^{(n-1-i)}(P,0)\, F^{(i)}(P,\tau)] + [u(P,0)-2\varphi_0]\, u^{(n+1)}(P,\tau) + \\ & + [u^{\cdot}(P,0)-2\varphi_1]\, u^{(n)}(P,\tau)\}\, d\Omega - 2\int\limits_S \{(u^{(n)}-f^{(n)}) * \nabla u\cdot \mathrm{n} + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} [u^{(n-1-i)}(P,0) - f^{(n-1-i)}(P,0)] \nabla u^{(i)}(P,\tau)\cdot \mathrm{n}\}\, dS. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь многократное дифференцирование по $t$ обозначено через

$$\frac{\partial^n A}{\partial t^n}=A^{(n)}. \tag{3.10}$$

Покажем, в какой форме из вариационного принципа

$$\delta I^{(n)}=0 \tag{3.11}$$

вытекают уравнение (2.1) и условия (2.2), (2.3). После преобразования вариацию $\delta I^{(n)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta I^{(n)} = 2\int\limits_{\Omega} \{ & (u^{\cdot\cdot}-\nabla^2 u+F) * \delta u^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [u^{(n+1-i)}(P,\tau) - \\ & -\nabla^2 u^{(n-1-i)}(P,\tau) + F^{(n-1-i)}(P,\tau)]\,\delta u^{(i)}(P,0) + \\ & + [u^{\cdot}(P,0)-\varphi_1]\,\delta u^{(n)}(P,\tau) + [u(P,0)-\varphi_0]\,\delta u^{(n+1)}(P,\tau)\}\, d\Omega - \\ & - 2\int\limits_S \{(u^{(n)}-f^{(n)}) * \delta\nabla u\cdot \mathrm{n} + \sum_{i=0}^{n-1} [u^{(n-1-i)}(P,0) - \\ & - f^{(n-1-i)}(P,0)]\,\mathrm{n}\cdot\delta\nabla u^{(i)}(P,\tau)\}\, dS. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда видно, что условиями стационарности функционала являются уравнение (2.1), начальные условия (2.3), уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t^i}(u^{\cdot\cdot} - \nabla^2 u + F) = 0, \quad P \in \Omega, \quad t = \tau, \tag{3.13}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и краевые условия

$$u^{(n)} = f^{(n)}, \qquad P \in S, \qquad 0 < t < \tau, \tag{3.14}$$

$$u^{(i)} = f^{(i)}, \qquad P \in S, \qquad t = 0, \tag{3.15}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Можно легко видеть, что краевые условия (3.14), (3.15) эквивалентны краевым условиям (2.2).

Приведем теперь функционалы, получаемые из функционала (2.14) интегрированием.

Формула для интегрирования свертки имеет вид

$$\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} A * B\, d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau_1)^{n-1} A(P, \tau_1)\, d\tau_1 * B =$$
$$= g_{n-1} * A * B, \tag{3.16}$$

где

$$g_k = \frac{1}{k!}t^k. \tag{3.17}$$

Приведем еще соотношение, применяемое в дальнейшем:

$$\int_0^\tau d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} A^{\cdot} * B^{\cdot}\, d\tau_n = g_{n-3} * [A - A(P, 0)] * [B - B(P, 0)]. \tag{3.18}$$

С учетом формул (3.16), (3.18) после $n$-кратного интегрирования функционала (2.14) получаем

$$I_{(n)} = \int_\Omega \{g_{n-3} * [u - u(P, 0)] * [u - u(P, 0)] + g_{n-1} * \nabla u * \nabla u +$$
$$+ 2g_{n-1} * F * u + 2[u(P, 0) - \varphi_0(P)]\, g_{n-2} * [u - u(P, 0)] -$$
$$- 2\varphi_1(P)\, g_{n-1} * u\}\, d\Omega - 2\int_S g_{n-1} * (u - f) * \nabla u \cdot \mathrm{n}\, dS. \tag{3.19}$$

Первой вариации функционала (3.19) можно придать вид

$$\delta I_{(n)} = 2\int_\Omega \{(u^{\cdot\cdot} - \nabla^2 u + F) * g_{n-1} * \delta u + [u^{\cdot}(P, 0) - \varphi_1(P)]\, g_{n-1} * \delta u +$$
$$+ [u(P, 0) - \varphi_0(P)]\, g_{n-2} * [\delta u - \delta u(P, 0)]\}\, d\Omega -$$
$$- 2\int_S (u - f) * g_{n-1} * \delta \nabla u \cdot \mathrm{n}\, dS. \tag{3.20}$$

Из соотношений (3.20) видна эквивалентность задачи (2.1)—(2.3) и вариационного принципа

$$\delta I_{(n)} = 0. \tag{3.21}$$

Отметим, что случай $n = 2$, т. е. $\delta I_{(2)} = 0$, приводит к вариационному принципу, представленному в работе [6].

## 4. Закон взаимности и один вариант формулы Грина

Вариационные принципы, приведенные в предыдущих параграфах, могут быть использованы для получения общих формул для решения волнового уравнения.

Прежде всего выведем формулу, аналогичную формуле, которая в различных случаях уравнений математической физики называется законом взаимности. Вывод формулы основан на том факте, что если волновое уравнение (2.1) и краевое и начальное условия (2.2), (2.3) удовлетворены, то вариация функционала (2.16) равняется нулю при любом выборе вариаций функции $u$.

Первая вариация функционала (2.16) может быть записана в виде

$$\delta I = 2 \int_\Omega \{ (-\nabla^2 \delta u + \delta u^{\cdot\cdot}) * u + F * \delta u + u(P, \tau)\, \delta u^{\cdot}(P, 0) -$$

$$- u(P, 0)\, \delta u^{\cdot}(P, \tau) + [u(P, 0) - \varphi_0]\, \delta u^{\cdot}(P, \tau) + u^{\cdot}(P, \tau)\, \delta u(P, 0) -$$

$$- \varphi_1\, \delta u(P, \tau) \}\, d\Omega + 2 \int_S [u * \nabla \delta u \cdot \mathrm{n} - (u - f) * \nabla \delta u \cdot \mathrm{n} + \nabla u \cdot \mathrm{n} * \delta u]\, dS. \tag{4.1}$$

Введем обозначение

$$\delta u = v \tag{4.2}$$

и предположим, что $v$ является решением волнового уравнения

$$\nabla^2 v - v^{\cdot\cdot} = H(P, t), \quad P \in \Omega, \quad 0 < t < \tau \tag{4.3}$$

при краевом условии

$$v = h(P, t), \quad P \in S, \quad 0 < t < \tau \tag{4.4}$$

и при начальных условиях

$$v = \varrho_0(P), \quad v^{\cdot} = \varrho_1(P), \quad P \in \Omega, \quad t = 0. \tag{4.5}$$

Учитывая соотношения (4.2)—(4.5) и приравнивая вариацию (4.1) нулю, получаем следующую формулу:

$$\int_\Omega [H * u - \varrho_0 u^{\cdot}(P, \tau) - \varrho_1 u(P, \tau)]\, d\Omega + \int_S h * \nabla u \cdot \mathrm{n}\, dS =$$

$$= \int_\Omega [F * v - \varphi_0 v^{\cdot}(P, \tau) - \varphi_1 v(P, \tau)]\, d\Omega + \int_S f * \nabla v \cdot \mathrm{n}\, dS. \tag{4.6}$$

Особый интерес представляет преобразованный вариант формулы (4.6), которая получается, если из нее исключить функции $F$, $H$, $f$, $h$, $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varrho_0$, $\varrho_1$ с помощью соотношений (2.1)—(2.3), (4.3)—(4.5):

$$\int\limits_{\Omega} (\square^2 v \ast u - \square^2 u \ast v) d\Omega = \int\limits_{S} (u \ast \nabla v \cdot \mathbf{n} - v \ast \nabla u \cdot \mathbf{n}) dS -$$
$$- \int\limits_{\Omega} [u(P,0)\, v^{\cdot}(P,\tau) + u^{\cdot}(P,0)\, v(P,\tau) -$$
$$- v(P,0)\, u^{\cdot}(P,\tau) - v^{\cdot}(P,0)\, u(P,\tau) \}] d\Omega. \qquad (4.7)$$

Здесь

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (4.8)$$

Формула (4.7) является одним из возможных вариантов формулы Грина для волнового оператора.

Наконец отметим, что две последовательности модифицированных формул, соответствующих формулам (4.6), (4.7), можно получить, исходя из модифицированных функционалов (3.9), (3.19) или проводя дифференцирование и интегрирование формул (4.6), (4.7) по параметру $\tau$.

ЛИТЕРАТУРА


1. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957 .
2. Полак Л. С., Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике, М., 1960.
3. Ланцош К., Вариационные принципы механики, М., 1965.
4. Gurtin M. E., Arch. Rational Mech. and Analysis, **13**, No. 3, 179 (1963).
5. Gurtin M. E., Arch. Rational Mech. and Analysis, **16**, No. 1, 34 (1964).
6. Gurtin M. E., Quart. Appl. Math., **22**, No. 3, 252 (1964).
7. Gurtin M. E., J. Mathematical Physics, **6**, No. 10, 1506 (1965).
8. Шалов В. М., Докл. АН СССР, **151**, № 2, 292 (1963).
9. Шалов В. М., Докл. АН СССР, **151**, № 3, 511 (1963).
10. Шалов В. М., Дифф. ур., **1**, № 10, 1338 (1965).
11. Морс Ф. М., Фешбах Г. Ф., Методы теоретической физики, т. 1, М., 1958.
12. Becker M., The principles and applications of variational methods, The Mass. Inst. Techn. Res. Mon., No. 27, Cambridge, Massachusetts, 1964.
13. Finlayson B. A., Scriven L. E., Appl. Mech. Rev., **19**, No. 9, 735 (1966).
14. Slattery J. C., Chem. Engng Sci.. **19**, No. 10, 801 (1964).
15. Flumerfelt R. W., Slattery J. C., Chem. Engng Sci., **20**, No 2, 157 (1965).
16. Nichols R. A., Bankoff S. G., J. Heat and Mass Transfer, **8**, No. 2, 329 (1965).
17. Lewins J., Nucl. Sci. Engng, **20**, No. 4, 517 (1964).
18. Айнола Л. Я., Докл. АН СССР, **172**, № 2, 306 (1967).
19. Айнола Л. Я., Инженерно-физ. ж., **12**, № 4, 475 (1967).
20. Айнола Л., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 2, 139 (1967).
21. Айнола Л. Я., Инженерный ж., Мех. твердого тела, № 2, 87 (1967).
22. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, М.—Л., 1951, с. 203—213.


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
16/IV 1968

L. AINOLA

## LAINEVÕRRANDI SEGAÜLESANDE VARIATSIOONPRINTSIIBID JA ÜLDISED VALEMID

Lainevõrrandi segaülesanne formuleeritakse ajavahemiku $(0, \tau)$ osas variatsioonülesande kujul. Vastava funktsionaali diferentseerimise ja integreerimise teel parameetri $\tau$ järgi tuletatakse selle ülesande jaoks kaks lõpmatut funktsionaalide jada.

Leitud variatsioonprintsiipe kasutatakse vastastikkuse seaduse ja Greeni valemi ühe variandi kui üldiste seaduste tuletamiseks.

L. AINOLA

## THE VARIATIONAL PRINCIPLES AND GENERAL THEOREMS FOR THE MIXED PROBLEM OF THE WAVE EQUATION

The mixed problem of the wave equation in an interval $(0, \tau)$ is formulated as a variational problem. By the differentiation and integration of the corresponding functional by the parameter $\tau$, two infinite sequences of functionals for the considered problem are derived. The presented variational principles are applied to derive general theorems: the reciprocal theorem and a variant of Green's formula.