EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.1.05

Я. КУКС

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ В СВЯЗИ С ПРОБЛЕМОЙ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу распознавания образов: Имеются два непересекающихся множества A и B в n-мерном пространстве R_n. Требуется определить функцию $\Phi(\bar{x})$, которая принимает значения $\Phi(\bar{x}) > 0$, если $\bar{x} \in A$, и $\Phi(\bar{x}) < 0$, если $\bar{x} \in B$. Данную задачу можно поставить и следующим образом: требуется определить такое преобразование пространства R_n в N-мерное пространство R_N, чтобы образы A_N и B_N множеств A и B соответственно были разделимы гиперплоскостью $(\bar{\gamma}_0, \bar{x}) = 0$, и требуется определить такую гиперплоскость.

В применениях в качестве приближения гиперплоскости $(\bar{\gamma}_0, \bar{x}) = 0$ берется гиперплоскость $(\bar{\gamma}, \bar{x}) = 0$, которая разделяет элементы множеств A_N и B_N, относящиеся к случайной выборке G с конечным числом элементов. В данной статье предлагается алгоритм для определения гиперплоскости $(\bar{\gamma}, \bar{x}) = 0$ в предположении, что требуемое преобразование пространства R_n в пространство R_N уже имеется и что элементы множества G имеют отличную от нуля конечную норму. Пусть множество $\bar{G}$ состоит из всех элементов $\bar{x}$, которые удовлетворяют условию $\bar{x} \in A_N \cap G$ или $-\bar{x} \in B_N \cap G$. Задачу, решаемую предлагаемым алгоритмом, сформулируем следующим образом.

Задача 1. Определить вектор $\bar{\gamma}$, удовлетворяющий условию $(\bar{\gamma}, \bar{x}) > 0$, если $\bar{x} \in \bar{G}$.

При изложении алгоритма предполагаем, что координаты пространства R_N, а также элементы $\bar{x}$ множества $\bar{G}$ пронумерованы в некотором (возможно, случайном) порядке.

При построении алгоритма преследуем две цели: во-первых, — получить решением задачи 1 вектор $\bar{\gamma}$ с большим числом нулевых координат, что даст экономию в вычислениях при дальнейшем пользовании результатом; во-вторых, — получить решение задачи 1 в результате возможно меньшего количества вычислений. С целью получения вектора $\bar{\gamma}$ с возможно меньшим количеством ненулевых координат представляется уместным, если имеется некоторое предположение о полезности признаков (координат пространства R_N), координаты пространства R_N пронумеровать в порядке понижения предполагаемой полезности.

Алгоритм. Введем следующие обозначения: $\bar{x}_i$ — вектор множества $\bar{G}$; $\bar{x}_i^h$ — вектор, h первых координат которого равны соответствующим координатам вектора $\bar{x}_i$ и остальные $N - h$ координат равны нулю;

$\bar{x}'_i = \bar{x}_i^h/\|\bar{x}_i^h\|$; M — количество элементов в множестве $\bar{G}$; s — индекс цикла; h_s — числовое значение h в s-м цикле; t_1, t_2, t_3, t_4 — вспомогательные величины для образования цикла.

1. $t_1 := 0$, $t_3 := 0$.
2. $s := 0$.
3. Выберем начальное значение величины h_s, $h_0 \leqslant N$.
4. Выберем ε, $0 < \varepsilon < 1$.
5. Выберем начальное числовое значение (количество векторов $\bar{x}'_i$, рассматриваемых в п. 6) величины M_s. Верхняя грань числового значения M_0 зависит от возможностей употребляемой при вычислениях ЭВМ.
6. Решим следующую задачу.

Задача 2. Определим вектор $\bar{y}$ с минимальной нормой из множества таких $\bar{y}$, которые при условии

$$\|\bar{y}\| \leqslant 1$$

удовлетворяют максимально возможному количеству из неравенств

$$(\bar{y}, \bar{x}'_i) \geqslant \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, M_0.$$

Метод решения задачи 2 дается в пояснениях к алгоритму. Минимизированием нормы $\|\bar{y}\|$ получим максимальное значение вычисляемой в последующем величины $\alpha_1 = \varepsilon/\|\bar{y}\|$. Условие $\|\bar{y}\| \leqslant 1$ обеспечит выполнимость соотношения $\alpha_1 \geqslant \varepsilon$.

7. $s := s + 1$.
8. $h_s := h_{s-1}$.
9. Вычислим $\bar{\gamma}_s = \bar{y}/\|\bar{y}\|$, $\alpha_s = \varepsilon/\|\bar{y}\|$.
10. Вычислим скалярные произведения $(\bar{\gamma}_s, \bar{x}'_i)$ для $i = M_{s-1} + 1, M_{s-1} + 2, \ldots, M_s$, где величине M_s придадим такое числовое значение, что величина m_s (количество векторов $\bar{x}'_i$, для которых удовлетворяются условия $(\bar{\gamma}_s, \bar{x}'_i) < \alpha_s$, $i \leqslant M_s$) достигнет максимально допустимого значения $m_{\max}$, или, если это невозможно, $M_s = M$ при $m_s < m_{\max}$. Величину $m_{\max}$ выберем с учетом возможностей употребляемой при вычислениях ЭВМ.

   Продолжим: а) если $m_s > 0$, то п. 11; б) если $m_s = 0$, то п. 46.
11. Перенумеруем элементы множества $\bar{G}$ так, чтобы удовлетворялись условия

$$(\bar{\gamma}_s, \bar{x}'_i) \geqslant \alpha_s \text{ для } i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s; \tag{1}$$

$$(\bar{\gamma}_s, \bar{x}'_i) < \alpha_s \text{ для } i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s.$$

12. Решим следующую задачу.

Задача 3. Из числа ограничений $(\bar{y}, \bar{x}'_i) \geqslant \varepsilon$, $i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s$ определим некоторую максимальную совокупность ограничений, которая образует допустимую область, содержащую вектор $\bar{y}$, удовлетворяющий условиям

$$(\bar{y}, \gamma_s) \geqslant \varepsilon\,\alpha_s + \sqrt{\|\bar{y}\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2},$$

$$(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon/\alpha_s,$$

$$\|\bar{y}\| \leqslant 1.$$

Пусть индексы векторов, образующих ограничения данной совокупности, образуют множество D. Определим вектор $\bar{y}$ с минимальной нормой при ограничениях

$$(\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon \text{ для } i \in D,$$

$$(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon \alpha_s + \sqrt{\|\bar{y}\|^2 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \alpha_s^2},$$

$$(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon / \alpha_s.$$

Метод решения задачи 3 дается в пояснениях к алгоритму. Решением задачи 3, как следует из леммы (см. пояснения к алгоритму) и неравенства (1), мы получили вектор $\bar{y}$ с нормой $\|\bar{y}\| \leqslant 1$, удовлетворяющий условию $(\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s$ и $(\bar{y}, \bar{x}_i') = \varepsilon$, если $(\bar{\gamma}_s, \bar{x}_i') = \alpha_s$, $(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) = \varepsilon \alpha_s + \sqrt{\|\bar{y}\|^2 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \alpha_s^2}$ и векторы $\bar{x}_i' - \bar{\gamma}_s (\bar{x}_i', \bar{\gamma}_s)$ и $\bar{y} - \bar{\gamma}_s (\bar{y}, \bar{\gamma}_s)$ направлены противоположно. Найденный вектор $\bar{y}$ является наилучшим в том смысле, что при задании только векторов $\bar{x}_i'$, $i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s$, вектора $\bar{\gamma}_s$ и величины α_s и при требовании обеспечить выполнимость условий $(\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s$ и $\|\bar{y}\| \leqslant 1$ невозможно определить другой вектор, удовлетворяющий большему количеству ограничений $(\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon$, $i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s$. Минимизированием $\|\bar{y}\|$ достигнем максимального значения вычисляемой в последующем величины $\varepsilon / \|\bar{y}\|$. Условие $\|\bar{y}\| \leqslant 1$ включается в условия задачи 3 с целью удовлетворения соотношения $\alpha_{s+1} \geqslant \varepsilon$.

Продолжим: а) если $(\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для $i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s$, то п. 7; б) если $(\bar{y}, \bar{x}_i') < \varepsilon$ для некоторого $i \in [M_s - m_s + 1, M_s]$ и $h_s < N$, то п. 13; в) если $(\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для некоторого, но не для всех $i \in [M_s - m_s + 1, M_s]$ и $h_s = N$, то п. 7; г) если $(\bar{y}, \bar{x}_i') < \varepsilon$ для $i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s$, $h_s = N$ и $M_s - m_s > t_1$, то п. 34; д) если $(\bar{y}, \bar{x}_i') < \varepsilon$ для $i = M_s - m_s + 1, M_s - m_s + 2, \ldots, M_s$, $h_s = N$, $M_s - m_s = t_1$, то п. 39.

13. Вычислим $\bar{\gamma}_s' = \bar{y} / \|\bar{y}\|$.

14. Перенумеруем элементы множества $\bar{G}$ таким образом, чтобы решение $\bar{y}$ задачи 3 не удовлетворяло только m_s' последним ограничениям той же задачи.

15. Вычислим следующие скалярные произведения:

$$(\bar{\gamma}_s', \bar{x}_i') = a_i \geqslant \varepsilon / \|\bar{y}\| \text{ для } i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s',$$

$$(\bar{\gamma}_s', \bar{x}_i') = a_i < \varepsilon / \|\bar{y}\| \text{ для } i = M_s - m_s' + 1, M_s - m_s' + 2, \ldots, M_s,$$

где $m_s' \leqslant m_s$.

16. Выберем ε_s, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_s < 1$.

Условие $\varepsilon_s \geqslant \varepsilon$ вместе с условием $\|\bar{y}\| \leqslant 1$ задачи 3 обеспечит справедливость соотношения $\alpha_{s+1} \geqslant \varepsilon$.

17. $j := h_s + 1$. Продолжим: п. 19.

18. $j := j + 1$.

19. Вычислим

$$a_{ij} = a_i \,\|\bar{x}_i^h\| / \sqrt{\|\bar{x}_i^h\|^2 + x_{ij}^2}, \quad z_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\|\bar{x}_i^h\|^2 + x_{ij}^2},$$

где $i = 1, 2, \ldots, M_s$.

20. $l := M_s - m_s' + 1$. Продолжим: п. 22.

21. $l := l + 1$.

22. Решим уравнение

$$a_{lj}\sqrt{1-\beta^2} + z_{lj}\,\beta = \varepsilon_s$$

относительно β. Проверим удовлетворенность условия

$$\min_i \,(a_{ij}\sqrt{1-\beta^2} + z_{ij}\,\beta) \geqslant \varepsilon_s, \quad i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s' \tag{2}$$

для действительных решений β, если таковые имеются.

Продолжим: а) если имеется хотя бы одно действительное решение β, удовлетворяющее условию (2), то п. 23; б) если не имеется действительного решения β, удовлетворяющего условию (2) и 1) $l < M_s$, то п. 21; 2) $l = M_s$, $j < N$, то п. 18; 3) $l = M_s$, $j = N$, $m_s' < m_s$, $M_s < M$, то п. 7; 4) $l = M_s$, $j = N$, $m_s' < m_s$, $M_s = M$, то п. 30; 5) $l = M_s$, $j = N$, $m_s' = m_s$, $M_s - m_s > t_3$, то п. 30; 6) $l = M_s$, $j = N$, $m_s' = m_s$, $M_s - m_s = t_3 > t_1$, то п. 34; 7) $l = M_s$, $j = N$, $m_s' = m_s$, $M_s - m_s = t_3 = t_1$, то п. 39.

23. Присвоим индексам координат пространства R_N следующие значения:

если $k \leqslant h_s$ или $k > j$, то новое $k := k$;
если $k = j$, то новое $k := h_s + 1$;
если $j > k > h_s$, то новое $k := k + 1$.

24. Определим действительное значение β, в промежутке $[-1, 1]$, при котором выражение

$$\min_i \,(a_{ih_s+1}\sqrt{1-\beta^2} + z_{ih_s+1}\,\beta), \quad i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s', l \tag{3}$$

достигнет максимума.

25. Вычислим координаты $\gamma_{s+1\,k}$ вектора $\bar{\gamma}_{s+1}$:

$$\gamma_{s+1\,k} = \gamma_{sk}\sqrt{1-\beta^2} \text{ для } k = 1, 2, \ldots, h_s, h_s+2, h_s+3, \ldots, N \text{ и}$$

$$\gamma_{s+1\,k} = \beta \text{ для } k = h_s + 1.$$

26. $h_{s+1} := h_s + 1$.

27. Величине α_{s+1} присвоим вычисленное в п. 24 максимальное значение выражения (3).

28. $s := s + 1$.

29. Вычислим скалярные произведения

$$(\bar{\gamma}_s, \bar{x}_i) \text{ для } i = M_{s-1} - m_{s-1}' + 1, M_{s-1} - m_{s-1}' + 2, \ldots, M_{s-1}.$$

Продолжим: п. 10.

30. $t_3 := M_s - m'_s$.

31. Решим следующую задачу.

Задача 4.* Определим вектор $\overline{y}$, для которого $\|\overline{y}\|^2$ достигнет минимума при ограничениях

$$(\overline{y}, \overline{x}'_i) \geqslant \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, M_s - m'_s .$$

32. Вычислим $\overline{\gamma}_{s+1} = \overline{y}/\|\overline{y}\|$, $\alpha_{s+1} = \varepsilon/\|\overline{y}\|$.

33. $h_{s+1} := h_s$. Продолжим: п. 28.

34. Вычислим скалярные произведения

$$(\overline{\gamma}_s, \overline{x}'_i) \text{ для } i = M_s + 1, \ M_s + 2, \ldots, M.$$

35. Перенумеруем элементы множества $\overline{G}$ так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$(\overline{\gamma}_s, \overline{x}'_i) \geqslant \varepsilon \text{ для } i = 1, 2, \ldots, M'_s,$$

$$(\overline{\gamma}_s, \overline{x}'_i) < \varepsilon \text{ для } i = M'_s + 1, \ M'_s + 2, \ldots, M.$$

36. $M_s := M'_s$.

37. $t_1 := M_s$, $t_2 := 0$.

38. Решим следующую задачу.

Задача 5. Определим вектор $\overline{y}$, для которого $\|\overline{y}\|^2$ достигнет минимума при ограничениях

$$(\overline{y}, \overline{x}'_s) \geqslant \varepsilon, \ i = 1, 2, \ldots, M_s.$$

Продолжим: п. 7.

39. $t_2 := t_2 + 1$.

Продолжим: а) если $(M - M_s)/m_{\max} > t_2$, то п. 43; б) если $(M - M_s)/m_{\max} \leqslant t_2$, $h_s < N$, то п. 40; в) если $(M - M_s)/m_{\max} \leqslant t_2$, $h_s = N$, то закончим вычисления, так как алгоритм не сходится.

40. Выберем ε', учитывая условие

$$\varepsilon' \leqslant \min_i (\varepsilon \|\overline{x}_i^h\| / \|\overline{x}_i\|) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s,$$

чем обеспечим удовлетворенность условия

$$(\overline{\gamma}_s, \overline{x}_i/\|\overline{x}_i\|) \geqslant \varepsilon' \text{ для } i = 1, 2, \ldots, M_s - m_s.$$

41. $\varepsilon := \varepsilon'$, $M_s := M_s - m_s$.

42. $h_s := N$. Продолжим: п. 37;

43. $t_4 := 0$.

44. $\overline{x}_i := \overline{x}_{i+1}$ для $i = M_s + 1, \ M_s + 2, \ldots, M - 1$ и $\overline{x}_M := \overline{x}_{M_s+1}$.

45. $t_4 := t_4 + 1$. Продолжим: а) если $t_4 < m_{\max}$, то п. 44; б) если $t_4 = m_{\max}$, то п. 12.

46. $\overline{\gamma} := \overline{\gamma}_s$. Вектор $\overline{\gamma}$ является решением задачи (1).

* Задачи 4 и 5 можно решить методом градиентов, принимая за начальное решение вектор $\overline{\gamma}_s$.

Достаточное для сходимости алгоритма условие. Пусть для элементов $\bar{x}_{i_\alpha}$ в некоторой стадии вычислений удовлетворяются условия $(\bar{\gamma}_s, \bar{x}'_{i_\alpha}) \geqslant \alpha_s$, $i_\alpha \in [1, M_s]$. Предположим, что существует нормированный вектор $\bar{\gamma}$, удовлетворяющий условию $(\bar{\gamma}, \bar{x}_i/\|\bar{x}_i\|) \geqslant \tau \geqslant \varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, M$.

Если для каждого элемента $\bar{x}_i$ множества $\bar{G}$ существует такая последовательность векторов $\bar{x}_i = \bar{x}_{i_0}$, $\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_p} = \bar{x}_{i_\alpha}$, что

$[1/(\|\bar{x}_{i_k}\| \cdot \|\bar{x}_{i_{k+1}}\|)](\bar{x}_{i_k}, \bar{x}_{i_{k+1}}) \geqslant \cos[\arccos(2\varepsilon^2 - 1) - \arccos(2\tau^2 - 1)]$ для $k = 0, 1, \ldots, p - 1$, то алгоритм сходится после конечного числа повторений цикла.

Пояснения к алгоритму. Некоторые утверждения в изложении алгоритма основывались на следующей лемме:

Лемма. *Если в пространстве R_N существуют такие векторы $\bar{x}, \bar{y}$ и $\bar{\gamma}$, что*

$$\|\bar{x}\| = 1, \ \|\bar{\gamma}\| = 1,$$

$$(\bar{x}, \bar{\gamma}) \geqslant \alpha, \ (\bar{y}, \bar{\gamma}) \geqslant \varepsilon/\alpha \text{ для } \alpha > 0,$$

$$(\bar{y}, \bar{\gamma}) \geqslant \varepsilon\alpha + \sqrt{\|\bar{y}\|^2 - \varepsilon^2}\sqrt{1 - \alpha^2},$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1$,

то

$$(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Выразим векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в следующей форме:

$$\bar{x} = (\bar{x}, \bar{\gamma})\bar{\gamma} + \sqrt{1 - (\bar{x}, \bar{\gamma})^2}\,\bar{\varepsilon}_1, \text{ где } (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\gamma}) = 0 \text{ и } \|\bar{\varepsilon}_1\| = 1;$$

$$\bar{y} = (\bar{y}, \bar{\gamma})\bar{\gamma} + \sqrt{\|\bar{y}\|^2 - (\bar{y}, \bar{\gamma})^2}\,\bar{\varepsilon}_2, \text{ где } (\bar{\varepsilon}_2, \bar{\gamma}) = 0 \text{ и } \|\bar{\varepsilon}_2\| = 1.$$

Скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{y})$ можно выразить следующим образом:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{\gamma})(\bar{y}, \bar{\gamma})(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}) + \sqrt{1 - (\bar{x}, \bar{\gamma})^2}\sqrt{\|\bar{y}\|^2 - (\bar{y}, \bar{\gamma})^2}\,(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2). \quad (4)$$

Ясно, что при $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) \geqslant 0$ из выражения (4) следует $(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \varepsilon$. Рассмотрим ниже случай $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) < 0$. Так как при условиях леммы и при $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) < 0$ производные выражения (4) удовлетворяют условиям $\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) > 0$, $\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(\bar{x}, \bar{\gamma}) > 0$ и $\partial(\bar{x}, \bar{y})/\partial(\bar{y}, \bar{\gamma}) > 0$, то скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{y})$ приобретает минимальное значение, если $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) = \min(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) = -1$, $(\bar{x}, \bar{\gamma}) = \alpha$ и $(\bar{y}, \bar{\gamma}) = \varepsilon\alpha + \sqrt{\|\bar{y}\|^2 - \varepsilon^2}\sqrt{1 - \alpha^2}$.

Вычисляя из последнего выражения $\|\bar{y}\|^2$ и вставляя в выражение (4) минимизирующие значения величин $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$, $(\bar{x}, \bar{\gamma})$ и $\|\bar{y}\|^2$, получим:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant \alpha(\bar{y}, \bar{\gamma}) - \sqrt{1 - \alpha^2}\sqrt{[(\bar{y}, \bar{\gamma}) - \varepsilon\alpha]^2/(1 - \alpha^2) + \varepsilon^2 - (\bar{y}, \bar{\gamma})^2}.$$

Последнее выражение, учитывая положительность выражения $\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{\|\bar{y}\|^2-(\bar{y},\bar{\gamma})^2}$ и условие $(\bar{y},\bar{\gamma}) \geqslant \varepsilon/\alpha$, после некоторых преобразований приобретает вид $(\bar{x},\bar{y}) \geqslant \varepsilon$.

Решение задач 2 и 3. Сформулируем следующие вспомогательные задачи:

Задача 6. Определить вектор $\bar{u}$, для которого $\|\bar{u}\|^2$ достигнет минимума при ограничениях

$$(\bar{u},\bar{x}_i') \geqslant \varepsilon,\ i=1,2,\ldots,M_0.$$

Задача 7. Из числа ограничений $(\bar{u}_0,\bar{x}_i') \geqslant \varepsilon$, $i=M_s-m_s+1$, $M_s-m_s+2,\ldots,M_s$ определить некоторую максимальную совокупность ограничений, которая образует допустимую область, содержащую вектор $\bar{u}_0$, удовлетворяющий условиям

$$\|\bar{u}_0\| \leqslant 1,\ (\bar{u}_0,\bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon\,\alpha_s+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\alpha_s^2}.^*$$

Пусть индексы векторов, образующих ограничения данной совокупности, образуют множество D. Определить вектор $\bar{u}_0$ с минимальной нормой при ограничениях

$$(\bar{u}_0,\bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon\,\alpha_s+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\alpha_s^2},\ (\bar{u}_0,\bar{x}_i') \geqslant \varepsilon \text{ для } i \in D.$$

Задача 8. Определить вектор $\bar{u}$, для которого $\|\bar{u}\|^2$ достигнет минимума при ограничениях

$$(\bar{u},\bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon\,\alpha_s+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\alpha_s^2},$$

$$(\bar{u},\bar{x}_i') \geqslant \varepsilon \text{ для } i=M_s-m_s+1,\ M_s-m_s+2,\ldots,M_s.$$

Задача 9. Определить вектор $\bar{u}$, для которого $\|\bar{u}\|^2$ достигнет минимума при ограничениях совокупности S, образующейся из совокупности некоторых ограничений задачи 6 (задачи 8), если эти ограничения принять в виде равенств. Решение данной задачи обозначим через $\bar{x}^S$.

Решение задачи 2 (задачи 7) произведем аналогично решению задачи 6 (задачи 8) методом Тейла и ван де Панна [1], с той лишь разницей, что не рассматриваем решения $\bar{x}^S$ тех задач 9 с совокупностью ограничений S, для которых $\|\bar{x}^S\| > 1$, а также задачи 9, совокупность ограничений которых содержит такую совокупность S, для которой $\|\bar{x}^S\| \geqslant 1$ или не существует решения. Из решений задач 9, удовлетворяющих условию $\|\bar{x}^S\| \leqslant 1$ ($\|\bar{x}^S\| \leqslant 1$ и $(\bar{x}^S,\bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon\,\alpha_s+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\alpha_s^2}$), выберем те, которые при данном условии удовлетворяют некоторой максимальной совокупности ограничений из числа следующих ограничений:

$$(\bar{y},\bar{x}_i') \geqslant \varepsilon,\ i=1,2,\ldots,M_0$$

$$((\bar{u}_0\,\bar{x}_i') \geqslant \varepsilon,\ i=M_s-m_s+1,\ M_s-m_s+2,\ldots,M_s).$$

* Так как $\varepsilon\,\alpha_s+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\alpha_s^2} \geqslant \varepsilon/\alpha_s$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha_s \leqslant 1$, то обеспечивается также выполнимость условия $(\bar{u}_0,\bar{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon/\alpha_s$.

Из выбранных таким образом векторов $\overline{x}^S$ решением $\overline{y}$ задачи 2 (решением $\overline{u}_0$ задачи 7) является вектор $\overline{x}^S$ с минимальной нормой.

Если решение $\overline{u}_0$ задачи 7 удовлетворяет условию $\|\overline{u}_0\| = 1$, то $\overline{u}_0$ является решением $\overline{y}$ задачи 3. Если $\|\overline{u}_0\| < 1$, то вычислим вектор $\overline{v}$, для которого $\|\overline{v}\|^2$ достигнет минимума при ограничениях $(\overline{v}, \overline{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon/\alpha_s$, $(\overline{v}, \overline{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для $i \in D$. Задачу можно решить методом градиентов, принимая за начальное решение вектор $\overline{u}_0$. Если удовлетворяется условие $(\overline{v}, \overline{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon\alpha_s + \sqrt{\|\overline{v}\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2}$, то $\overline{v}$ является решением $\overline{y}$ задачи 3.

Если удовлетворяется условие $(\overline{v}, \overline{\gamma}_s) < \varepsilon\alpha_s + \sqrt{\|\overline{v}\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2}$, то решение $\overline{y}$ задачи 3 должно удовлетворять условию $(\overline{y}, \overline{\gamma}_s) = \varepsilon\alpha_s + \sqrt{\|\overline{y}\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2}$. Вычислим приближение $\tilde{y}$ вектора $\overline{y}$ с заданной степенью точности, пользуясь следующей схемой вычислений:

1. Выберем величину η, требуя, чтобы при окончании вычислений было удовлетворено условие $|\,\|\tilde{y}\| - \|\overline{y}\|\,| \leqslant \eta$.
2. Индексу цикла $p := 0$.
3. Определим вектор $\overline{y}_{p+1}$ как линейную комбинацию

$$\overline{y}_{p+1} = \lambda\overline{v} + (1-\lambda)\overline{u}_p, \quad \text{где } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

требуя удовлетворенности условия

$$(\overline{y}_{p+1}, \overline{\gamma}_s) = \varepsilon\alpha_s + \sqrt{\|\overline{y}_{p+1}\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2}.$$

Тем самым величина λ определена из выражения

$$\lambda(\overline{v}, \overline{\gamma}_s) + (1-\lambda)(\overline{u}_p, \overline{\gamma}_s) = \varepsilon\alpha_s + \sqrt{\|\lambda\overline{v} + (1-\lambda)\overline{u}_p\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2}$$

при условии $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Из теории линейного программирования известно, что вектор $\overline{y}_{p+1}$ удовлетворяет линейным ограничениям $(\overline{y}_{p+1}, \overline{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для $i \in D$, $(\overline{y}_{p+1}, \overline{\gamma}_s) \geqslant \varepsilon/\alpha_s$, так как этим ограничениям удовлетворяют векторы $\overline{v}$ и $\overline{u}_p$.

Если $|\,\|\overline{y}_{p+1}\| - \|\overline{y}\|\,| \leqslant \eta$ *, то $\tilde{y} := \overline{y}_{p+1}$ и решение задачи 3 закончено, иначе продолжаем вычисления.

4. $p := p + 1$
5. Вычислим вектор $\overline{u}_p$, для которого $\|\overline{u}_p\|^2$ достигнет минимума при ограничениях $(\overline{u}_p, \overline{\gamma}_s) = (\overline{y}_p, \overline{\gamma}_s)$, $(\overline{u}_p, \overline{x}_i') \geqslant \varepsilon$ для $i \in D$. Данную задачу можно решить методом градиентов, принимая за начальное решение вектор $\overline{y}_p$. Продолжим п. 3.

Докажем сходимость последовательности $\|\overline{y}_p\| - \|\overline{y}\|$ к нулю. Очевидно, что при $\|\overline{y}_p\| - \|\overline{y}\| = 0$ также $\|\overline{u}_p\| - \|\overline{y}\| = 0$ и $\|\overline{y}_{p+1}\| - \|\overline{y}\| = 0$. Рассмотрим ниже случай $\|\overline{y}_p\| - \|\overline{y}\| = \Delta > 0$. Так как

$$\varrho = \|\overline{y}\|(\overline{y}_p, \overline{\gamma}_s)/[(\overline{y}, \overline{\gamma}_s)\cdot\|\overline{y}_p\|] = \|\overline{y}\|(\varepsilon\alpha_s +$$
$$+ \sqrt{(\|\overline{y}\| + \Delta)^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2})/[(\varepsilon\alpha_s + \sqrt{\|\overline{y}\|^2 - \varepsilon^2}\,\sqrt{1 - \alpha_s^2})(\|\overline{y}\| + \Delta)] < 1,$$

* Критерий для справедливости неравенства дается ниже.

то $\|\bar{y}\| \leq \|\bar{y}_p\| \, (\bar{y}, \bar{\gamma}_s)/(\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s)$, откуда, учитывая справедливость выражения $(\bar{y}, \gamma_s) < (\bar{y}_p, \gamma_s)$, следует, что

$$\|\bar{y}_p\| - \|\bar{y}\| > \|\bar{y}_p\| \, [1 - (\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \, / (\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s)]. \tag{5}$$

Удовлетворяются следующие условия:

$$[(\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s)/(\bar{y}, \bar{\gamma}_s)] \, \|\bar{y}\| > (\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s),$$

$$[(\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s)/(\bar{y}, \bar{\gamma}_s)](\bar{y}, \bar{x}_i') \geqslant [(\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s)/(\bar{y}, \bar{\gamma}_s)] \, \varepsilon > \varepsilon \text{ для } i \in D.$$

Как известно из теории квадратичного программирования, отсюда следует, что существует вектор $\bar{u}_p$, удовлетворяющий условиям

$$(\bar{u}_p, \bar{\gamma}_s) = (\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s), \ (\bar{u}_p, \bar{x}_i') \geqslant \varepsilon \text{ для } i \in D \text{ и}$$

$$\|\bar{u}_p\| < \|\bar{y}\| \, (\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s)/(\bar{y}, \bar{\gamma}_s). \tag{6}$$

Из выражений (5) и (6) следует справедливость выражения $\|\bar{u}_p\| - \|\bar{y}\| < (\|\bar{y}_p\| - \|\bar{y}\|) \, \|\bar{y}\| \, (\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s) \, / [(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \, \|\bar{y}_p\|]$, откуда в свою очередь, учитывая определение вектора $\bar{y}_{p+1}$, следует

$$\|\bar{y}_{p+1}\| - \|\bar{y}\| < (\|\bar{y}_p\| - \|\bar{y}\|) \, \|\bar{y}\| \, (\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s) \, / [(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \, \|\bar{y}_p\|] = (\|\bar{y}_p\| - \|\bar{y}\|) \, \varrho.$$

Производная $\partial\varrho/\partial\Delta < 0$ для $\Delta \geqslant 0$. Отсюда следует, что $| \, \|\bar{y}_p\| - \|\bar{y}\| \, | < \eta$ для $p > q + 1$, где q определяется из равенства

$$\eta = (\|\bar{y}_1\| - \|\bar{y}\|) \{ \|\bar{y}\| \, (\varepsilon \alpha_s +$$
$$+ \sqrt{(\|\bar{y}\| + \eta)^2 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \alpha_s^2}) / [(\bar{y}, \bar{\gamma}_s) \, (\|\bar{y}\| + \eta)] \}^q.$$

Тем самым доказана сходимость последовательности $\|\bar{y}_p\| - \|\bar{y}\|$ к нулю.

Так как производная $\partial\varrho/\partial\|\bar{y}\| > 0$ для $\|\bar{y}\| > \Delta$, то, выбирая $\eta \leqslant \|\bar{v}\| < \|\bar{y}\|$, можем пользоваться следующим критерием для заканчивания вычислений при решении задачи (3):

$$| \, \|\bar{y}_{p+p'}\| - \|\bar{y}\| \, | < \eta \text{ для } p' > q,$$

где q определяется из равенства

$$\eta = (\|\bar{y}_p\| - \|\bar{v}\|) \{ \|\bar{y}_p\| \, (\varepsilon \alpha_s +$$
$$+ \sqrt{(\|\bar{y}_p\| + \eta)^2 - \varepsilon^2} \sqrt{1 - \alpha_s^2}) / [(\bar{y}_p, \bar{\gamma}_s) \, (\|\bar{y}_p\| + \eta)] \}^q.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кюнци Г. П., Крелле В., Нелинейное программирование, М., 1966.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/IV 1968

J. KUKS

ÜHEST ALGORITMIST SEOSES KUJUNDITE ÄRATUNDMISE PROBLEEMIGA

Artiklis esitatakse algoritm kahte lõplikku hulka eraldava hüpertasandi määramiseks, kui hulkade elementideks on vektorid eukleidilises ruumis. Nimetatud hüpertasandi normaali esimeseks lähenduseks võetakse vektor, millel on «suur» arv fikseeritud nullkoordinaate. Järgnevalt, vastavalt vajadusele algoritmi koonduvuse mõttes, vähendatakse järkjärgult normaali fikseeritud koordinaatide arvu. Kui eksisteerib eraldav hüpertasand, mille normaalil on nullkoordinaate, siis on olemas võimalus sellise hüpertasandi leidmiseks.

J. KUKS

ON AN ALGORITHM CONCERNING THE PROBLEM OF PATTERN RECOGNITION

This paper presents the algorithm for the determination of a hyperplane which separates two finite sets of elements in Euclidean space. The first approximation for this plane's normal is the vector with a "great" number of fixed zero-value coordinates. Next, the number of fixed coordinates is reduced to ensure the convergence of the algorithm if a need arises. There exists a possibility of determining a separating hyperplane so that its normal has a number of zero-value coordinates if such a hyperplane exists.