EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.1.04

Ф. ВИХМАНН

О СУММИРУЕМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

§ 1

Пусть задано бесконечное произведение *

$$\Pi(1+U_k). \tag{1}$$

Бесконечное произведение называется сходящимся, если при $n\to\infty$ последовательность $\prod\limits_{k=0}^{n}(1+U_k)$ имеет конечный предел, отличный от нуля. Если $1+U_k=0$ для конечного числа значений k, мы будем говорить, что произведение (1) сходится и расходится, смотря по тому, сходится оно или нет при зачеркивании этих нулевых сомножителей. Если же $1+U_k=0$ для бесконечного числа значений k, то произведение считается расходящимся.

К. Слепенчук [1–4] рассматривал проблему: каким условиям должны удовлетворять числа ε_k, чтобы произведение

$$\Pi\,(1+\varepsilon_k U_k) \tag{2}$$

сходилось при всех $\{U_k\}\in c, m, l$ или соответственно сходящихся или абсолютно сходящихся рядах $\sum U_k$.

Пусть $A=(a_{nk})$ — бесконечная матрица. С помощью этой матрицы можно образовать последовательность.

$$Q_n=\Pi(1+a_{nk}U_k) \tag{3}$$

при условии сходимости произведения (3) для всех $n=0,1,\ldots$ Будем говорить, что произведение (1) суммируемо методом A, если соответствующая ему последовательность (3) сходится к конечному, отличному от нуля пределу. В противном случае будем говорить о расходящемся произведении. Суммируемость произведения изучали Дж. Робисон [5], М. Калашников [6], К. Слепенчук [1–4, 7]. Ими получен ряд теорем относительно суммируемости разных подклассов бесконечных произведений.

В настоящей статье рассматривается одно возможное обобщение результатов К. Слепенчука. От последовательности $\{U_k\}$ требуется соответственно суммируемость или абсолютная суммируемость методом взвешенных средних Рисса P.

---

* Если пределы изменения индексов у $\sum$ или Π не обозначены, то они пробегают все значения от нуля до бесконечности.

Метод взвешенных средних Рисса P определяется в виде преобразования последовательности в последовательность

$$U_n' = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{P_n} U_k,$$

где $\sum_{k=0}^{n} p_k = P_n$, $P_n \neq 0$. При $p_k \neq 0$ метод P нормален. В дальнейшем будут использованы следующие леммы.

Лемма 1. *Метод P регулярен тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \ \lim P_n = \infty,$$

$$2^\circ \ \sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n).$$

Лемма 2. *Метод P сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда* $|P_{k-1}| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \right| = O(1)$.

Лемма 3 (см., например, [8], стр. 115). *Если $\{U_k\}$ суммируема методом P, то*

$$U_n = \lim U_n' + o\left(\frac{P_n}{p_n}\right) + o(1).$$

Теорема 1. *В случае регулярного нормального P бесконечное произведение* (2) *сходится при всех P-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$ тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \ \sum \left| P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| < \infty,$$

$$2^\circ \ \sum \left(P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right)^2 < \infty.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть условие 1° не выполнено. Тогда расходится хотя бы один из рядов $\sum \left| P_{2k} \Delta \frac{\varepsilon_{2k}}{p_{2k}} \right|$ и $\sum \left| P_{2k+1} \Delta \frac{\varepsilon_{2k+1}}{p_{2k+1}} \right|$. Для конкретности пусть первый из них расходится (второй случай рассматривается аналогично). Тогда расходится хотя бы один из рядов $\sum_i \left| P_{2k_i} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_i}}{p_{2k_i}} \right|$ и $\sum_j \left| P_{2k_j} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_j}}{p_{2k_j}} \right|$, где соответственно $\frac{\varepsilon_{2k_i} \varepsilon_{2k_i+1}}{p_{2k_i} p_{2k_i+1}} > 0$ или $\frac{\varepsilon_{2k_j} \varepsilon_{2k_j+1}}{p_{2k_j} p_{2k_j+1}} \leqslant 0$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$. Пусть расходится первый из них. Без ограничения общности можно предположить, что $P_{2k_0} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_0}}{p_{2k_0}} \neq 0$.

Построим P-суммируемую последовательность $\{U_k\}$ и покажем, что для нее соответствующее произведение (2) расходится. Выберем

$$U_k = \begin{cases} -\dfrac{|P_{2k_i}|}{\sigma_{2k_i} p_{2k_i}} \operatorname{sgn} \Delta \dfrac{\varepsilon_{2k_i}}{p_{2k_i}}, & \text{если } k = 2k_i, \\ \dfrac{|P_{2k_i}|}{\sigma_{2k_i} p_{2k_i+1}} \operatorname{sgn} \Delta \dfrac{\varepsilon_{2k_i}}{p_{2k_i}}, & \text{если } k = 2k_i + 1, \ i = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\sigma_{2k_i} = \sum_{s=0}^{i} \left| P_{2k_s} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_s}}{p_{2k_s}} \right|.$$

Очевидно,

$$P\{U_k\} = 0.$$

Теперь

$$\Pi(1+\varepsilon_k U_k) = \prod_i \left(1 - \frac{\left| P_{2k_i} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_i}}{p_{2k_i}} \right|}{\sigma_{2k_i}} - \frac{P^2_{2k_i}\varepsilon_{2k_i}\varepsilon_{2k_i+1}}{\sigma^2_{2k_i} p_{2k_i} p_{2k_i+1}}\right) = \Pi(1-a_i).$$

Поскольку $a_i > 0$, то произведение (2) и ряд $\sum a_i$ одновременно или сходятся, или расходятся. Но по теореме Дини (см., например, [9]) ряд

$$\sum_i \frac{\left| P_{2k_i} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_i}}{p_{2k_i}} \right|}{\sigma_{2k_i}}$$

расходится. Полученное противоречие доказывает сходимость ряда $\sum\limits_i \left| P_{2k_i} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_i}}{p_{2k_i}} \right|$. Если допустить расходимость ряда $\sum\limits_j \left| P_{2k_j} \Delta \frac{\varepsilon_{2k_j}}{p_{2k_j}} \right|$, то доказательство аналогично, только вместо последовательности $\{U_k\}$ надо выбрать последовательность $\{-U_k\}$.

Пусть не выполнено условие 2°. Можно предположить, что $\varepsilon_0 \neq 0$. Возьмем последовательность $\{U_k\}$, в которой

$$U_k = \begin{cases} \dfrac{P_{2i}}{p_{2i}\sqrt{\sigma_{2i}}}, & k = 2i, \\ -\dfrac{P_{2i+1}}{p_{2i+1}\sqrt{\sigma_{2i}}}, & k = 2i+1, \end{cases}$$

$$\sigma_{2i} = \sum_{k=0}^{2i} \left(P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k}\right)^2.$$

Последовательность $\{U_k\}$ P-суммируема к нулю, поскольку

$$U'_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{P_{2m+1}} \sum\limits_{s=0}^{m} \dfrac{p_{2s+1}}{\sqrt{\sigma_{2s}}}, & \text{если } n = 2m+1, \\ \dfrac{1}{P_{2m}}\left[-\sum\limits_{s=0}^{m-1} \dfrac{p_{2s+1}}{\sqrt{\sigma_{2s}}} + \dfrac{P_{2m}}{\sqrt{\sigma_{2m}}}\right], & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Из равенства

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k U_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k}\right) U'_k + \left(P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n}\right) U'_n$$

следует сходимость ряда $\sum \varepsilon_k U_k$. Действительно, условие 1° необходимо и $P_k \varepsilon_k = O(p_k)$. Последнее условие следует по [10] (следствие 1) из сходимости к нулю последовательности $\{\varepsilon_k U_k\}$ при всех P-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$. Но теперь из соотношения

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha) - \alpha}{-\alpha^2} = \frac{1}{2} \quad (\varepsilon_k U_k = \alpha) \tag{4}$$

следует, что соответствующее бесконечное произведение расходится, что и доказывает необходимость условия 2°.

Достаточность. По [11] (теорема 9) условия 1° и $P_k \varepsilon_k = o(p_k)$ достаточны для сходимости ряда $\sum \varepsilon_k U_k$ при всех P-суммируемых $\{U_k\}$. Ввиду регулярности $|P_k| \geqslant M|p_k|$. С учетом леммы 3 получим, что сходится и ряд $\sum (\varepsilon_k U_k)^2$. Но сходимость этих двух рядов достаточна для сходимости произведения (2).

Теорема полностью доказана.

Если $p_k = 1$, то метод P превратится в метод Чезаро C^1, и из теоремы 1 получится соответствующее следствие.

Поскольку множители сходимости относительно P и P_O при регулярном P совпадают ([11], теорема 14, следствие), то нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Теорема 2. *В случае регулярного нормального P бесконечное произведение* (2) *сходится при всех P-ограниченных последовательностях $\{U_k\}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы* 1.

§ 2

В этом параграфе доказывается теорема, которая является обобщением теоремы 2 из [2].

Теорема 3. *При регулярном нормальном P бесконечное произведение* (1) *суммируемо методом A для всех P-суммируемых к нулю последовательностей $\{U_k\}$ тогда и только тогда, когда* *

1° $\lim\limits_n a_{nk} = a_k$,

2° $\sum\limits_k \left| P_k \Delta \frac{a_{nk}}{p_k} \right| < M$,

3° $\sum\limits_k \left(P_k \frac{a_{nk}}{p_k} \right)^2 < M$.

При выполнении условий теоремы справедливо равенство

$$\lim_n \prod (1 + a_{nk} U_k) = \prod (1 + a_k U_k). \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Условие 1° следует из регулярности метода P, если взять $U_k = \delta_{kl}$. По теореме 1 ряды $\sum\limits_k \left| P_k \Delta \frac{a_{nk}}{p_k} \right|$ и $\sum\limits_k \left(P_k \frac{a_{nk}}{p_k} \right)^2$ сходятся для всех $n = 0, 1, \ldots$. Покажем, что члены этих рядов равномерно ограничены. Для этого достаточно доказать равномерную ограниченность $\left| P_k \frac{a_{nk}}{p_k} \right| < M$. Тогда, ввиду $|a_{nk}| \leqslant M$ [2], отсюда следует ограниченность $P_k \Delta \frac{a_{nk}}{p_k}$. Пусть $P_k \frac{a_{nk}}{p_k}$ не ограничено равномерно. Поскольку $\lim\limits_k P_k \frac{a_{nk}}{p_k} = 0$, то можно выбрать две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{r_s\}_0^\infty$ и $\{n_s\}_0^\infty$, такие, что

$$\left| P_{r_s} \frac{a_{n_s, r_s}}{p_{r_s}} \right| > 2^{3s+1} \sigma_s, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots; \ \sigma_0 = 2,$$

* При наличии двух индексов разность берется по второму индексу.

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=0}^{j-1} \left| P_{r_i} \frac{a_{n_j, r_i}}{p_{r_i}} \right| + \left| P_{r_0} \frac{a_{n_0, r_0}}{p_{r_0}} \right|, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

$$\prod_{i=r_{s+1}}^{\infty} \left(1 - \left| P_i \frac{a_{n_s, i}}{p_i} \right| \frac{1}{2^i}\right) \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \left| P_i \frac{a_{n_s, i}}{p_i} \right| < 2^{r_{s+1}}.$$

Возьмем последовательность $\{U_k\}$, в которой

$$U_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_s} \dfrac{P_{r_s}}{p_{r_s}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^s \operatorname{sgn}\left(P_{r_s} \dfrac{a_{n_s, r_s}}{p_{r_s}}\right), & \text{если } k = r_s, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Она, очевидно, P-суммируема к нулю. Но

$$|Q_{n_t}| = \left| \prod_{s=0}^{\infty} (1 + a_{n_t, r_s} U_{r_s}) \right| = \left| \prod_{s=0}^{t-1} (1 + a_{n_t, r_s} U_{r_s}) \times \right.$$

$$\left. \times (1 + a_{n_t, r_t} U_{r_t}) \prod_{s=t+1}^{\infty} (1 + a_{n_t, r_s} U_{r_s}) \right| > 2^t \to \infty.$$

Полученное противоречие доказывает равномерную ограниченность $P_k \frac{a_{nk}}{p_k}$.

Докажем необходимость условия 2°. Если условие 2° не выполнено, то не ограничена хотя бы одна из последовательностей $\sum_l \left| P_{2l} \Delta \frac{a_{n, 2l}}{p_{2l}} \right|$ и $\sum_l \left| P_{2l+1} \Delta \frac{a_{n, 2l+1}}{p_{2l+1}} \right|$. Пусть, для конкретности, не ограничена первая из них. Тогда ее можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\sum_l \left| P_{2l} \Delta \frac{a_{n, 2l}}{p_{2l}} \right| = \sum_l |A_{nl}| = \sum_l |B_{nl}| + \sum_l |C_{nl}|, \tag{6}$$

где

$$B_{nl} = \begin{cases} A_{nl}, & \text{если } r_{nl} = \dfrac{a_{n, 2l}\, a_{n, 2l+1}}{p_{2l}\, p_{2l+1}} \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } r_{nl} > 0, \end{cases}$$

$$C_{nl} = \begin{cases} A_{nl}, & \text{если } r_{nl} > 0, \\ 0, & \text{если } r_{nl} \leqslant 0. \end{cases}$$

Хотя бы одна из последовательностей, стоящих справа, должна быть неограничена. Пусть это будет первая из них. Тогда найдутся две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{q_s\}_0^\infty$ и $\{n_s\}_1^\infty$, такие, что

$$\sum_{l=q_{s-1}+1}^{q_s} |B_{n_s, l}| \geqslant 2^{2(q_{s-1} - q_0) + 3 + s} M(s+1),$$

$$\sum_{m=2(q_s+1)}^{\infty} \left| P_m \Delta \frac{a_{n_s, m}}{p_m} \right| < \frac{1}{6}, \quad \left| P_{2q_s+1} \frac{a_{n_s, 2(q_s+1)}}{p_{2(q_s+1)}} \right| < \frac{1}{6}, \tag{7}$$

$$\sum_{m=2(q_s+1)}^{\infty} \left(P_m \frac{a_{n_s, m}}{p_m} \right)^2 < \frac{1}{3}, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Построим теперь P-суммируемую к нулю последовательность $\{U_k\}$, соответствующее которой бесконечное произведение расходится. Выберем

$$U_k = \begin{cases} \dfrac{|P_{2l}|}{4M(s+1)p_{2l}} \operatorname{sgn} \Delta \dfrac{a_{n_s, 2l}}{p_{2l}}, & \text{если } k = 2l, \\ -\dfrac{|P_{2l}|}{4M(s+1)p_{2l+1}} \operatorname{sgn} \Delta \dfrac{a_{n_s, 2l}}{p_{2l}}, & \text{если } k = 2l+1 \\ & \text{при } B_{n_s, l} \neq 0,\ q_{s-1} < l \leqslant q_s,\ s = 1, 2, \ldots. \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{8}$$

где $M > 1$ — верхняя граница $\left|P_k \dfrac{a_{nk}}{p_k}\right|$ и $\left|P_k \Delta \dfrac{a_{nk}}{p_k}\right|$.

Покажем, что для этой $\{U_k\}$ последовательность Q_{n_s} расходится. Представим

$$|Q_{n_s}| = |\prod_k (1 + a_{n_s, k} U_k)| = |\prod_{k=0}^{2q_{s-1}+1} (1 + a_{n_s, k} U_k)| \times$$

$$\times |\prod_{k=2(q_{s-1}+1)}^{2q_s+1} (1 + a_{n_s, k} U_k)|\, |\prod_{k=2(q_s+1)}^{\infty} (1 + a_{n_s, k} U_k)| = ABC \tag{9}$$

и оценим в отдельности каждый сомножитель справа:

$$A \geqslant \prod_{l=q_0+1}^{q_{s-1}} \left(1 - \left|\frac{P_{2l} a_{n_s, 2l}}{4M p_{2l}}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{P_{2l} a_{n_s, 2l+1}}{4M p_{2l+1}}\right|\right) > \left(\frac{1}{2}\right)^{2(q_{s-1}-q_0)};$$

$$B \geqslant \prod_{l=q_{s-1}+1}^{q_s} \left(1 + \frac{|B_{n_s, l}|}{4M(s+1)}\right) > \frac{1}{4M(s+1)} \sum_{l=q_{s-1}+1}^{q_s} |B_{n_s, l}| \geqslant 2^{2(q_{s-1}-q_0)+1+s}.$$

Ввиду (4), (7) и леммы 3, получим

$$|\ln C| \leqslant |\sum_{m=2(q_s+1)}^{\infty} a_{n_s, m} U_m| + \frac{1}{2} \sum_{m=2(q_s+1)}^{\infty} \frac{a_{n_s, m}^2 U_m^2}{(1 + a_{n_s, m} \Theta_m U_m)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=2(q_s+1)}^{\infty} \left|P_m \Delta \frac{a_{n_s, m}}{p_m}\right| |U'_m| + \left|P_{2q_s+1} \cdot \frac{a_{n_s, 2(q_s+1)}}{p_{2(q_s+1)}}\right| |U'_{2q_s+1}| +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=2(q_s+1)}^{\infty} \frac{a_{n_s, m}^2 U_m^2}{(1 + a_{n_s, m} \Theta_m U_m)^2} < \frac{1}{2} \quad (0 < \Theta_m < 1),$$

если только q_s достаточно велико. Но тогда $C > \frac{1}{2}$. Теперь из (9) следует, что $|Q_{n_s}| > 2^s$, и произведение (1) не суммируемо методом A. Полученное противоречие доказывает ограниченность первой последовательности (6). Если же не ограничена вторая последовательность (6), то найдутся последовательности натуральных чисел $\{q_s\}_0^\infty$ и $\{n_s\}_1^\infty$, для которых выполнены условия (7). За последовательность $\{U_k\}$ выберем последовательность $\{-U_k\}$ из (8). Покажем, что соответствующее бесконечное произведение (1) не суммируемо. Для этого представим Q_{n_s} в виде (9) и оценим в отдельности каждый сомножитель. Получим:

$$A < 2^{2(q_{s-1}-q_0)};$$

$$B \leqslant \left| \prod_{l=q_{s-1}+1}^{q_s} \left(1 - \frac{|C_{n_s,l}|}{4M(s+1)}\right) \right| \leqslant \left[1 + \frac{1}{4M(s+1)} \sum_{l=q_{s-1}+1}^{q_s} |C_{n_s,l}|\right]^{-1} <$$

$$< 2^{-2(q_{s-1}-q_0)-1-s}; \qquad C < 2,$$

если только q_s достаточно велико. В итоге имеем, что

$$|Q_{n_s}| < 2^{-s}$$

и соответствующее бесконечное произведение не суммируемо. Тем самым необходимость условия 2° доказана.

Перейдем к доказательству необходимости условия 3°. Допустим, что оно не выполнено. Поскольку $\left|P_k \frac{a_{nk}}{p_k}\right| < M$ и по [2] $\sum_k |a_{nk}| < M$, то из равенства

$$\left(P_k \frac{a_{nk}}{p_k}\right)^2 = \left(P_k \frac{a_{nk}}{p_k}\right)\left(P_k \Delta \frac{a_{nk}}{p_k}\right) + P_k \frac{a_{nk}}{p_k} P_{k+1} \frac{a_{n,k+1}}{p_{k+1}} - P_k \frac{a_{nk}}{p_k} a_{n,k+1}$$

следует

$$\sup \sum_k \left| P_k \frac{a_{nk}}{p_k} P_{k+1} \frac{a_{n,k+1}}{p_{k+1}} \right| = \infty.$$

Тогда должна быть не ограничена хотя бы одна из последовательностей

$$\sum_l \left| P_{2l} \frac{a_{n,2l}}{p_{2l}} P_{2l+1} \frac{a_{n,2l+1}}{p_{2l+1}} \right| = \sum_l |S_{nl}| \quad \text{и} \quad \sum_l \left| P_{2l+1} \frac{a_{n,2l+1}}{p_{2l+1}} P_{2l+2} \frac{a_{n,2l+2}}{p_{2l+2}} \right|.$$

Пусть не ограничена первая из них (второй случай рассматривается аналогично). Тогда должна быть не ограничена хотя бы одна из последовательностей

$$\sum_l |T_{nl}| \quad \text{и} \quad \sum_l |V_{nl}|, \tag{10}$$

где

$$T_{nl} = \begin{cases} S_{nl}, & \text{если } S_{nl} \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } S_{nl} > 0. \end{cases}$$

$$V_{nl} = \begin{cases} S_{nl}, & \text{если } S_{nl} > 0, \\ 0, & \text{если } S_{nl} \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть, для конкретности, не ограничена первая из этих последовательностей. Тогда найдутся возрастающие последовательности натуральных чисел $\{k_s\}$ и $\{n_s\}$, такие, что

$$\sum_{l=0}^{k_1} |T_{n_1,l}| > 4M^2,$$

$$\sum_{l=k_{t-1}^{(s)}+1}^{k_t^{(s)}} |T_{n_s,l}| > \sum_{r=1}^{s-1} \sum_{l=k_{r-1}+1}^{k_r} |T_{n_s,l}| + \sum_{l=k_{s-1}+1}^{k_{t-1}^{(s)}} |T_{n_s,l}|,$$

$$t = 1, 2, \ldots, q_s; \quad s = 2, 3, \ldots; \quad k_{s-1} = k_0^{(s)} < k_1^{(s)} < \ldots < k_{q_s}^{(s)} = k_s; \tag{11}$$

число q_s выбрано так, что

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{q_s} > 2^{2(k_{s-1}-k_1)+s+1},$$

$$\sum_{k=2(k_s+1)}^{\infty}\left|P_k\,\Delta\,\frac{a_{n_s,k}}{p_k}\right| < \frac{1}{6}, \quad \left|P_{2k_s+1}\,\frac{a_{n_s,2(k_s+1)}}{p_{2(k_s+1)}}\right| < \frac{1}{6},$$

$$\sum_{k=2(k_s+1)}^{\infty}\left(P_k\,\frac{a_{n_s,k}}{p_k}\right)^2 < \frac{1}{3}.$$

Построим P-суммируемую к нулю последовательность $\{U_m\}$, для которой соответствующее бесконечное произведение не суммируемо. Для этого выберем

$$U_m = \begin{cases} \dfrac{P_{2l}}{\sqrt{\sigma_l}\,p_{2l}}\,\operatorname{sgn}\Delta\left(P_{2l}\,\dfrac{a_{n_s,2l}}{p_{2l}}\right), & \text{если } m = 2l, \\ -\dfrac{P_{2l+1}}{\sqrt{\sigma_l}\,p_{2l+1}}\,\operatorname{sgn}\Delta\left(P_{2l}\,\dfrac{a_{n_s,2l}}{p_{2l}}\right), & \text{если } m = 2l+1 \\ & \text{при } T_{n_s,l} \neq 0,\ k_{s-1} < l \leqslant k_s,\ s = 2, 3, \ldots, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\sigma_l = \sum_{r=1}^{s-1}\ \sum_{u=k_{r-1}+1}^{k_r}|T_{n_s,u}| + \sum_{u=k_{s-1}+1}^{l}|T_{n_s,u}|.$$

Покажем, что соответствующая последовательность Q_{n_s} расходится. Представим

$$|Q_{n_s}| = \left|\prod_{m=0}^{2k_{s-1}+1}(1 + a_{n_s,m}U_m)\right|\left|\prod_{m=2(k_{s-1}+1)}^{2k_s+1}(1 + a_{n_s,m}U_m)\right| \times$$

$$\times\left|\prod_{m=2(k_s+1)}^{\infty}(1 + a_{n_s,m}U_m)\right| = ABC \tag{12}$$

и оценим каждый сомножитель в отдельности:

$$A > \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2(k_{s-1}-k_1)};$$

$$B = \left|\prod_{l=k_{s-1}+1}^{k_s}(1 + a_{n_s,2l}U_{2l})(1 + a_{n_s,2l+1}U_{2l+1})\right| >$$

$$> \prod_{l=k_{s-1}+1}^{k_s}\left(1 + \frac{|T_{n_s,l}|}{\sigma_l}\right) = \prod_{t=1}^{q_s}\ \prod_{l=k_{t-1}^{(s)}+1}^{k_t^{(s)}}\left(1 + \frac{|T_{n_s,l}|}{\sigma_l}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{t=1}^{q_s}\left(1 + \sum_{l=k_{t-1}^{(s)}+1}^{k_t^{(s)}}\frac{|T_{n_s,l}|}{\sigma_l}\right) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{q_s}.$$

Используя (11), можно показать, что при достаточно больших k_s

$$C > \frac{1}{2}.$$

Теперь из (12) следует оценка

$$|Q_{ns}| > 2^s,$$

и соответствующее бесконечное произведение не суммируемо. Тем самым первая последовательность (10) ограничена.

Если же не ограничена вторая последовательность (10), то доказательство аналогично соответствующей части доказательства необходимости условия 2°.

Достаточность. По теореме 1 произведение (3) сходится при всех $n = 0, 1, \ldots$. Докажем его равномерную сходимость относительно n. Если $s, t \to \infty$ то, ввиду условия 2° и регулярности P,

$$\sum_{k=s}^{t} a_{nk} U_k = \sum_{k=s}^{t-1} \left(P_k \Delta \frac{a_{nk}}{p_k}\right)\left(U'_k - \frac{P_{s-1}}{P_k} U'_{s-1}\right) +$$

$$+ P_t \frac{a_{nt}}{p_t}\left(U' - \frac{P_{s-1}}{P_t} U'_{s-1}\right)$$

стремится к нулю равномерно относительно n при любой P-суммируемой к нулю последовательности $\{U_k\}$. С другой стороны, по лемме 3

$$\sum_k (a_{nk} U_k)^2 = \sum_k a^2_{nk} \left[o\left(\frac{P_k}{p_k}\right) + o(1)\right]^2,$$

откуда следует равномерная сходимость стоящего слева ряда. Теперь из равенства (при достаточно большом k)

$$\ln(1 + a_{nk} U_k) = a_{nk} U_k - \frac{1}{2} \frac{a^2_{nk} U^2_k}{(1 + a_{nk} \Theta_{nk} U_k)^2} \quad (0 < \Theta_{nk} < 1),$$

ввиду $P_k \frac{a_{nk}}{p_k} = O(1)$ и леммы 3, вытекает равномерная сходимость ряда $\sum \ln(1 + a_{nk} U_k)$, эквивалентная равномерной сходимости произведения (3). Поскольку бесконечное произведение $\prod (1 + a_k U_k)$, очевидно, сходится, то равномерная сходимость (3) гарантирует справедливость формулы (5).

§ 3

В этом параграфе рассматривается сходимость бесконечного произведения (2) при абсолютной суммируемости $\{U_k\}$ или $\sum U_k$ методом Рисса P.

Теорема 4. *Если нормальный метод P сохраняет абсолютную сходимость, то бесконечное произведение* (2) *сходится при всех $|P|$-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$ тогда и только тогда, когда*

1° $P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} = O(1)$,

2° *ряд* $\sum \varepsilon_k$ *сходится*,

3° $\sum \varepsilon_k^2 < \infty$.

Доказательство. Если произведение (2) сходится, то $\{\varepsilon_k U_k\} \to 0$. Для этого по [10] (следствие 3) необходимо условие 1°. Если P сохраняет абсолютную сходимость, то по [4] необходимы условия 2° и 3°. С другой стороны, по [11] (теорема 11) условия 1° и 2° гарантируют сходимость ряда $\sum \varepsilon_k U_k$ при всех $|P|$-суммируемых $\{U_k\}$. Ряд $\sum (\varepsilon_k U_k)^2$ сходится, поскольку

$$\sum (\varepsilon_k U_k)^2 = \sum \varepsilon_k^2 \left(\frac{P_k}{p_k} U_k' - \frac{P_{k-1}}{p_k} U_{k-1}'\right)^2 = \sum \left(P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \bar{\Delta} U_k' + \varepsilon_k U_{k-1}'\right)^2 < \infty .$$

Но сходимость этих двух рядов достаточна для сходимости бесконечного произведения (2).

Теорема 5. *Если нормальный метод P сохраняет абсолютную сходимость, то бесконечное произведение* (2) *сходится при всех $|P|$-суммируемых рядах $\sum U_k$ тогда и только тогда, когда*

1° $P_k \dfrac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} = O(1)$,

2° $P_k \dfrac{\varepsilon_k}{p_k} = O(1)$.

Доказательство. Поскольку при сходимости бесконечного произведения (2) $\{\varepsilon_k U_k\} \to 0$, то из

$$\varepsilon_k U_k = \varepsilon_k \left(\frac{P_k}{p_k} u_k' - \frac{P_{k-2}}{p_{k-1}} u_{k-1}'\right), \ \sum |u_k'| < \infty$$

с помощью необходимых условий линейного преобразования $l \to c_0$ получим

$$P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} = O(1) \ \text{ и } \ P_{k-2} \frac{\varepsilon_k}{p_{k-1}} = O(1),$$

откуда следуют условия теоремы. С другой стороны, условия 1° и 2° по [10] (теорема 17) гарантируют абсолютную сходимость ряда $\sum \varepsilon_k U_k$ при всех $|P|$-суммируемых рядах $\sum U_k$.

Результаты настоящей статьи обобщаются на случай двойных бесконечных произведений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепенчук К. П., Докл. АН УССР, **2**, 110 (1952).
2. Слепенчук К. П., Научн. зап. Днепропетр. ун-та, **41**, 169 (1953).
3. Слепенчук К. П., Научн. зап. Днепропетр. ун-та, **55**, 97 (1961).
4. Слепенчук К. П., Изв. вузов, Математика, № 2, 144 (1964).
5. Robison G., Am. J. of Math., **51**, 653 (1929).
6. Калашников М. Д., УМЖ, **3**, 477 (1951).
7. Слепенчук К. П., Изв. вузов, Математика, № 6, 133 (1963).
8. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Изд. Тартуск. ун-та, 1966.
9. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М.—Л., 1959.
10. Кангро Г., Тыннов М., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **102**, 249 (1961).
11. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **37**, 191 (1955).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
12/V 1968

F. VICHMANN

LÕPMATUTE KORRUTISTE SUMMEERIMISEST

Leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused lõpmatu korrutise $\prod(1+\varepsilon_k U_k)$ koonduvuseks, kui jada $\{U_k\}$ on Riesz'i menetlusega summeeruv või tõkestatud. Teoreemides 4 ja 5 vaadeldakse juhtu, kus $\{U_k\}$ või ΣU_k on $|P|$-summeeruv. Lõpmatu korrutis on summeeruv menetlusega A, kui eksisteerib nullist erinev lõplik piirväärtus $\lim\limits_n \prod\limits_k (1+a_{nk}U_k)$. Teoreemis 3 esitatakse lõpmatu korrutise summeeruvuse tarvilikud ja piisavad tingimused juhul, kui jada $\{U_k\}$ on Riesz'i menetlusega summeeruv nulliks.

F. VICHMANN

ABOUT THE SUMMABILITY OF INFINITE PRODUCTS

In this paper necessary and sufficient conditions are given for the convergence of an infinite product $\prod(1+\varepsilon_k U_k)$ in the case of the summability or boundness of the sequence $\{U_k\}$ by Riesz mean P. Theorems 4 and 5 consider the case when the $\{U_k\}$ or ΣU_k is $|P|$-summable.

An infinite product is said to be summable by A if $\lim\limits_n \prod\limits_k (1+a_{nk} U_k)$ exists and differs from 0 and ∞. Theorem 3 gives necessary and sufficient conditions for the summability of an infinite product in the case of $\{U_k\}$ that is summable by Riesz mean P to zero.