EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.1.03

Э. РАЙК

О КЛАССЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ С ФЕЙЕРОВСКИМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

В данной работе исследуется сходимость в гильбертовом пространстве одного класса методов, так наз. методов фейеровского типа. Последовательность $\{x_n\}$ называется фейеровской относительно множества Q, если для любого $x \in Q$ выполняется неравенство $\|x_{n+1}-x\| \leqslant \|x_n - x\|$ [1-3]. Фейеровской последовательности $\{x_n\}$ присущи многие примечательные свойства.

Заметим сперва, что фейеровская последовательность $\{x_n\}$ относительно множества Q является также фейеровской относительно его выпуклой замкнутой оболочки. Действительно, для любых $x^i \in Q$ и m имеем

$$\|x_{n+1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\|^2 = \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\|^2 + 2\,(x_{n+1} - x_n, x_n -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i) = \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_{n+1} - x_n, x_n - x^i) =$$

$$= \|x_n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\|x_{n+1} - x^i\|^2 - \|x_n - x^i\|^2) \leqslant \|x_n - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\|^2,$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только выпуклые замкнутые множества Q. Известно еще ([4], лемма 6), что если для фейеровской последовательности $\{x_n\}$ относительно множества Q расстояние $\varrho(x_n, Q) \to 0$, то $x_n \to x^*$, где $x^* \in Q$.

Обозначим через Q^0 множество внутренних точек множества Q и продолжим исследование свойств фейеровских последовательностей.

Лемма 1. *Фейеровская последовательность $\{x_n\}$ относительно выпуклого замкнутого множества Q сходится, если $Q^0 \neq \varnothing$.*

Доказательство. Рассмотрим любую точку $x' \in Q^0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что из $\|x - x'\| \leqslant \delta$ следует $x \in Q$. Выберем точку $\bar{x} = x' + \delta \frac{x_n - x_{n+1}}{\|x_n - x_{n+1}\|}$, которая, согласно построению, принадлежит множеству Q, т. е. $\bar{x} \in Q$.

Используя «фейеровость» последовательности $\{x_n\}$ и свойства скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \|x_n - x'\|^2 - \|x_{n+1} - x'\|^2 &= \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\,(x_n - x_{n+1}, x_{n+1} - x') = \\ &= \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\,(x_n - x_{n+1}, x_{n+1} - \bar{x}) + 2\,(x_n - x_{n+1}, \bar{x} - x') = \\ &= \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\,(x_n - x_{n+1}, x_{n+1} - \bar{x}) + 2\delta\,\|x_n - x_{n+1}\| = \\ &= \|x_n - \bar{x}\|^2 - \|x_{n+1} - \bar{x}\|^2 + 2\delta\,\|x_n - x_{n+1}\| \geqslant 2\delta\,\|x_n - x_{n+1}\|. \end{aligned} \quad (1)$$

Суммируя неравенство (1) для разных n

$$\|x_0 - x'\|^2 \geqslant \|x_0 - x'\|^2 - \|x_k - x'\|^2 \geqslant 2\delta \sum_{s=0}^{k-1} \|x_s - x_{s+1}\|$$

и переходя к пределу, получаем

$$\|x_0 - x'\|^2 \geqslant 2\delta \sum_{s=0}^{\infty} \|x_s - x_{s+1}\|.$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Переходим к рассмотрению конкретных методов, в которых мы имеем дело с фейеровскими последовательностями.

Метод простых итераций для нерастягивающего оператора P ($\|Px - Py\| \leqslant \|x - y\|$) порождает фейеровскую последовательность относительно множества неподвижных точек оператора P. В работе [5] доказано (см. теорема 1), что если нерастягивающий оператор отображает в себя некоторое выпуклое замкнутое множество Q, то существует неподвижная точка $x : Px = x$. Обозначим множество неподвижных точек оператора P через $Q = \{x : Px = x\}$ и будем исследовать сходимость последовательности простых итераций $x_{n+1} = Px_n$.

Теорема 1. *Пусть множество неподвижных точек Q нерастягивающего оператора P содержит внутренние точки. Тогда последовательность простых итераций сходится к некоторой неподвижной точке x^*, $Px^* = x^*$.*

Доказательство. Последовательность простых итераций x_n является фейеровской относительно множества неподвижных точек $Q = \{x : Px = x\}$, так как $\|x_n - x\| \geqslant \|Px_n - Px\| = \|x_{n+1} - x\|$ и по лемме 1 сходится. В данном случае оператор P удовлетворяет условию Липшица и поэтому является непрерывным; переходя к пределу в обеих частях равенства $x_{n+1} = Px_n$, получаем $x^* = Px^*$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 1 последовательность $x_{n+1} = (1 - \lambda) x_n + \lambda P x_n$, $0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant 1$ также сходится к некоторой неподвижной точке оператора P. Действительно, если обозначить оператор $(1 - \lambda) x + \lambda P x = Ax$, $0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant 1$, то оператор A является тоже нерастягивающим и множества неподвижных точек оператора A и оператора P совпадают, и по теореме 1: $x_n \to x^*$, $x^* = Ax^* = Px^*$.

Сходимость последовательности простых итераций исследована во многих работах (см. библиографию в [6, 7]).

Решение системы неравенств $g_i(x) \leqslant 0$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$, где $g_i(x)$ — выпуклые и непрерывные функционалы, можно производить одним из следующих методов [8]:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{g_k(x_n)_+}{\|g'_k(x_n)\|^2} g'_k(x_n), \tag{2}$$

где

$$k = n (\operatorname{mod} m) + 1,$$

$$g_k(x_n)_+ = \max\{0, g_k(x_n)\};$$

здесь и дальше $0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant 2$;

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{g(x_n)_+}{\|g'(x_n)\|^2} g'(x_n), \tag{3}$$

где $g(x_n) = \sum_{i=1}^{m} K_i g_i(x_n)_+$ и все $K_i > 0$;

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{\max_j g_j(x_n)}{\|(\max_j g_j(x_n))'\|^2} (\max_j g_j(x_n))'. \tag{4}$$

Через $f'(x)$ обозначен опорный функционал к выпуклому непрерывному функционалу $f(x)$, т. е. линейный функционал, удовлетворяющий неравенству

$$(f'(x), y - x) \leqslant f(y) - f(x). \tag{5}$$

Лемма 2. *Последовательность* (2) *является фейеровской относительно множества* $Q = \{x : g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Доказательство. Используя свойства скалярного произведения и соотношения (2), (5), получаем для любого x, удовлетворяющего неравенству $g_k(x) \leqslant 0$, и тем более для любого $x \in Q$

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_{n+1} - x\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_n - x_{n+1}, x_{n+1} - x) =$$
$$= \|x_{n+1} - x\|^2 + 2\left(x_n - x_{n+1}, \frac{x_{n+1} - x_n}{2} - x\right) = \|x_{n+1} - x\|^2 +$$
$$+ 2\lambda \frac{g_k(x_n)_+}{\|g_k'(x_n)\|^2} \left(g_k'(x_n), \frac{x_{n+1} + x_n}{2} - x\right) = \|x_{n+1} - x\|^2 +$$
$$+ 2\lambda \frac{g_k(x_n)_+}{\|g_k'(x_n)\|^2} \left(g_k'(x_n), x_n - \frac{\lambda}{2} \frac{g_k(x_n)_+}{\|g_k'(x_n)\|^2} g_k'(x_n) - x\right) \geqslant \|x_{n+1} - x\|^2 +$$
$$+ 2\lambda \frac{g_k(x_n)_+}{\|g_k'(x_n)\|^2} \left(g_k(x_n) - \frac{\lambda}{2} g_k(x_n) - g_k(x)\right) \geqslant \|x_{n+1} - x\|^2.$$

Получим фейеровость последовательности (2) относительно множества Q. Аналогичным образом доказывается фейеровость последовательности (3) и (4) относительно множества Q.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$, *определенная по формулам* (2), (3) *или* (4), *сходится к* x^* *и* $\|g_k'(x)\|$ *ограничены в любой ограниченной области. Тогда* $x^* \in Q = \{x : g_k(x) \leqslant 0, k = 1, 2, \ldots, m\}$.

Доказательство. Допустим, что $x_n \to x^* \overline{\in} Q$. Тогда найдется хоть одно ограничение, для которого $g_k(x^*) > 0$. В силу непрерывности существует $\delta > 0$ такое, что если $\|x - x^*\| \leqslant \delta$, то $g_k(x) > \varepsilon > 0$. Согласно предположению леммы для тех же x имеем $\|g_k'(x)\| \leqslant M$. Тогда шаг, сделанный по формуле (2) в шаре $\|x - x^*\| \leqslant \delta$, имеет длину $\|x_{n+1} - x_n\| = = \lambda \frac{g_k(x_n)_+}{\|g_k'(x_n)\|} \geqslant \alpha \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon_1$. Но в соответствии со сделанным допущением найдется N такое, что для $n \geqslant N$ $\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4}$. Имеем

$$\varepsilon_1 \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \|x_{n+1} - x^*\| + \|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Приходим к противоречию, значит $x^* \in Q$. Аналогично доказывается сходимость последовательностей (3) и (4).

Теорема 2. *Пусть множество* $Q = \{x : g_k(x) \leqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$ *содержит внутренние точки и* $\|g'_k(x)\|$ $k = 1, 2, \ldots, m$ *ограничены в любой ограниченной области. Тогда последовательности (2), (3) и (4) сходятся к* $x^* \in Q$.

Доказательство заменяется проверкой условий и утверждений лемм 1, 2 и 3.

Из приведенных методов можно вывести методы проекций для отыскания некоторой общей точки выпуклых множеств. Действительно, пусть даны выпуклые замкнутые множества Q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим, например, последовательность (2), задавая функционалы $g_k(x)$ в виде $g_k(x) = \|x - P_k x\|$, где $P_k x$ — проекция точки x на множество Q_k, т. е. $\|x - P_k x\| = \min\limits_{y \in Q_k} \|x - y\|$. Этот функционал очевидным образом является выпуклым и непрерывным, и $g'_k(x) = \frac{x - P_k x}{\|x - P_k x\|}$, так как для него справедливо неравенство (5). Используя неравенство Коши и лемму 1 [4], получаем

$$(g'_k(x), y - x) = \left(\frac{x - P_k x}{\|x - P_k x\|}, y - x\right) =$$

$$= \left(\frac{x - P_k x}{\|x - P_k x\|}, y - P_k x\right) - \|x - P_k x\| = \left(\frac{x - P_k x}{\|x - P_k x\|}, y - P_k y\right) +$$

$$+ \left(\frac{x - P_k x}{\|x - P_k x\|}, P_k y - P_k x\right) - \|x - P_k x\| \leqslant \|y - P_k y\| - \|x - P_k x\| =$$

$$= g_k(y) - g_k(x).$$

Подставляем $g_k(x)$ и $g'_k(x)$ в формулу (2):

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(P_k x_n - x_n), \tag{6}$$

где

$$k = n (\operatorname{mod} m) + 1,$$

$$0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant 2.$$

Получаем известную формулу, определяющую метод последовательных проекций [4]. Условия сходимости последовательности (6) приведены в [4] при $0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta < 2$. В данном случае, если дополнительно предположить, что $Q^0 \neq \varnothing$, доказана сходимость и при $\lambda = 2$.

Следствие 1. Пусть пересечение выпуклых замкнутых множеств $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{m} Q_i$ содержит внутренние точки. Тогда последовательность (6) сходится при $0 < \alpha \leqslant \lambda \leqslant 2$ к $x^* \in Q$.

Доказательство. Зададим множества Q_k с функционалами $g_k(x) = \|x - P_k x\|$, $Q_k = \{x : g_k(x) \leqslant 0\}$. Как отмечено выше, функционалы $g_k(x)$ выпуклы и непрерывны, а $g'_k(x) = \frac{x - P_k x}{\|x - P_k x\|}$ и $\|g'_k(x)\| \leqslant 1$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2, откуда следует сходимость x_n k $x^* \in Q$.

Метод минимизации выпуклого непрерывного функционала $f(x)$ получается как частный случай из формулы (2). Допустим при этом, что функционал $f(x)$ достигает своего наименьшего значения f^*. Тогда множество точек минимума можно задавать в виде $Q=\{x: f(x)-f^* \leqslant 0\}$. Применяя для нахождения некоторой точки множества Q формулу (2), получаем последовательность

$$x_{n+1}=x_n+\lambda \frac{f^*-f(x_n)}{\|f'(x_n)\|^2} f'(x_n). \tag{7}$$

Следствие 2. Пусть множество $Q=\{x: f(x) \leqslant f^*=\min f(x)\}$ содержит внутренние точки и $\|f'(x)\|$ ограничена в любой ограниченной области. Тогда последовательность (7) при $0<\alpha \leqslant \lambda \leqslant 2$ сходится к некоторой точке x^*, $f(x^*)=f^*$.

В заключение отметим, что при допущении $Q^0 \neq \varnothing$ выбор $\lambda=2$ в формулах (2)—(4), (6) и (7) и $\lambda=1$ для метода простых итераций является не только допустимым в смысле сходимости, но оказывается и более эффективным сравнительно с другими значениями λ. Косвенным образом это видно уже в неравенстве (1).

Автор благодарит С. Ульма за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agmon S., Canad. J. Math., **6**, No. 3, 382 (1954).
2. Motzkin T. S., Schoenberg J., Canad. J. Math., **6**, No. 3, 393 (1954).
3. Еремин И. И., Докл. АН СССР, **160**, № 5, 994 (1965).
4. Гурин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Э. В., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **7**, № 6, 1211 (1967).
5. Browder F. E., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54**, No. 4, 1041 (1965).
6. Облонская Л. Я., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **8**, № 2, 417 (1968).
7. Browder F. E., Pietryshyn W. V., Bull. Am. Math. Soc., **72**, No. 3, 571 (1966).
8. Райк Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 3, 286 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/V 1968

E. RAIK

FEJERI TÜÜPI JADADEGA ITERATSIOONIMEETODITE KLASSIST

Jada x_n nimetame Fejeri tüüpi jadaks hulga Q suhtes, kui $\|x_{n+1}-x\| \leqslant \|x_n-x\|$ suvalise x jaoks hulgast Q. Artiklis tõestatakse hulga Q suhtes Fejeri tüüpi jada koonduvus eeldusel, et hulk Q omab sisepunkte. Seda kasutades uuritakse mitmesuguste iteratsioonimeetoditega saadud jadade koonduvust.

E. RAIK

ON THE CLASS OF ITERATIVE METHODS WITH THE FEJER-MONOTONE SEQUENCES

The sequence $\{x_n\}$ is Fejer-monotone with respect to the set Q if for all $x \in Q$ $\|x_{n+1}-x\| \leqslant \|x_n-x\|$. The convergence of the Fejer-monotone sequence with respect to the set Q supposing the set Q has an inner point is proved. Using this property of the Fejer-monotone sequence, the convergence of some iterative methods is considered.