EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.1.02

О. ВААРМАНН

О НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА. II

В данной статье для решения нелинейного операторного уравнения приводится еще один метод с последовательной аппроксимацией обратного оператора и выясняется, в каких условиях рассматриваемый итерационный процесс сходится. При изучении сходимости методов подобного вида в [1] мы предполагали существование и ограниченность обратного оператора $[P'(x)]^{-1}$. Оказывается, что в некоторых случаях можно отказаться от этих требований.

Для решения нелинейного уравнения

$$P(x)=0 \tag{1}$$

используем итерационный процесс

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n A_n P(x_n), \tag{2}$$

где $\varepsilon_n>0$, A_n — последовательность линейных операторов, приближенных к $[P'(x_n)]^{-1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим следующий способ определения последовательности $\{A_n\}$.

1. Пусть A — линейный, ограниченный, ненулевой оператор в банаховом пространстве E_1, $B_0=E-D_0A$ и

$$\|B_0\|=\mu<1, \tag{3}$$

где D_0 — некоторое приближение к обратному оператору A. Тогда для нахождения A^{-1} можно применить итерационный процесс [2]

$$X_{k+1}=B_0X_k+D_0, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где X_0 — произвольный линейный ограниченный оператор и E — единичный оператор.

Из (4) следует, что

$$A^{-1}-X_k=B_0(A^{-1}-X_0) \text{ и} \tag{5}$$

$$\|A^{-1}-X_k\|\leqslant\mu^k\|A^{-1}-X_0\|. \tag{6}$$

Если $X_0=A^{-1}$, то каждый $X_k=A^{-1}$.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X_k, \tag{7}$$

где коэффициенты $a_{n,k}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1. \tag{8}$$

Из условий (7), (8) следует, что $X_0 = A^{-1}$ влечет за собой $Y_n = A^{-1}$.

На основании (5), (7), (8) получаем

$$A^{-1} - Y_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (A^{-1} - X_k) = (\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} B_0^k)(A^{-1} - X_0) =$$
$$= W_n(B_0)(A^{-1} - X_0), \tag{9}$$

где $W_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} t^k$ — многочлен степени $\leqslant n$, удовлетворяющий условию

$$W_n(1) = 1. \tag{10}$$

Пусть теперь $E_1 = H$, где H — некоторое вещественное гильбертово пространство и B_0 — самосопряженный оператор в H. Тогда, если λ — некоторое собственное значение оператора $B_0(|\lambda| \leqslant \mu = \|B_0\|)$, то $W_n(\lambda)$ — собственное значение оператора $W_n(B_0)$ и

$$|W_n(\lambda)| \leqslant \|W_n(B_0)\| = \sup_{\lambda \in Z} |W_n(\lambda)| \leqslant \sup_{-\mu \leqslant t \leqslant \mu} |W_n(t)|, \tag{11}$$

где Z — спектр оператора B_0.

В статье [2] рекомендуется брать

$$W_n(t) = \left\{ \frac{T_n(t/\mu)}{T_n(1/\mu)} \right\},$$

где $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k$ — многочлен Чебышева.

Отметим, что если $D_0 = \alpha E$, то реккурентная формула (4) приобретает вид

$$X_{k+1} = B_0 X_k + D_0 = (E - \alpha A) X_k + \alpha E = X_k - \alpha (A X_k - E). \tag{12}$$

Применим изложенное выше для аппроксимации оператора $[P'(x)]^{-1}$ при решении операторного уравнения (1) по итерационной формуле (2).

Имея некоторое приближение $A_{n+1}^{(0)}$ к оператору $[P'(x_{n+1})]^{-1}$ и применяя два шага метода (12), получаем

$$A_{n+1}^{(i)} = A_{n+1}^{(i-1)} - \alpha_n (P'(x_{n+1}) A_{n+1}^{(i-1)} - E), \tag{13}$$

где $\alpha_n > 0$ и $i = 1, 2$.

Учитывая, что при $n = 2$

$$W_2(t) = \left\{ \frac{T_2(t/\mu)}{T_2(1/\mu)} \right\} = \frac{2t^2}{2-\mu^2} - \frac{\mu^2}{2-\mu^2},$$

согласно (7)—(10) имеем

$$A_{n+1}=\frac{2}{2-\mu_n^2}A_{n+1}^{(2)}-\frac{\mu_n^2}{2-\mu_n^2}A_n^{(0)},$$

где $\mu_n=\|E-\alpha_n P'(x_{n+1})\|$. (14)

Подставляя (13) в (14) и учитывая (8), после некоторых упрощений получаем

$$A_{n+1}=\frac{2}{2-\mu_n^2}\{A_{n+1}^{(0)}-\alpha_n(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E)-\alpha_n[P'(x_{n+1})(A_{n+1}^{(0)}-$$

$$-\alpha_n(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E))-E]\}-\frac{\mu_n^2}{2-\mu_n^2}A_{n+1}^{(0)}=\left(\frac{2}{2-\mu_n^2}-\frac{\mu_n^2}{2-\mu_n^2}\right)A_{n+1}^{(0)}+$$

$$+\frac{2}{2-\mu_n^2}[-\alpha_n(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E)-\alpha_n P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}+$$

$$+\alpha_n^2 P'(x_{n+1})(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E)+\alpha_n E]=A_{n+1}^{(0)}+$$

$$+\frac{2}{2-\mu_n^2}[\alpha_n^2 P'(x_{n+1})(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E)-2\alpha_n(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E)]=$$

$$=A_{n+1}^{(0)}-\frac{2\alpha_n^2}{2-\mu_n^2}\left(\frac{2}{\alpha_n}E-P'(x_{n+1})\right)\left(P'(x_{n+1})A_{n+1}^{(0)}-E\right).$$

Полагая $A_{n+1}^{(0)}=A_n$, получим итерационный процесс

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-A_nP(x_n), & (15)\\ A_{n+1}=A_n-\dfrac{2\alpha_n^2}{2-\mu_n^2}\left(\dfrac{2}{\alpha_n}E-P'(x_{n+1})\right)\left(P'(x_{n+1})A_n-E\right), & (16)\end{cases}$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$.

Пусть A_0 — некоторое приближение к оператору $[P'(x_0)]^{-1}$ и через λ_n, γ_n и β_n обозначены постоянные, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$\|A_n\|\leqslant\lambda_n \qquad (n=0, 1, \ldots), \tag{17}$$

$$\|E-P'(x_n)A_n\|\leqslant\gamma_n \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{18}$$

$$\|E-P'(x_n)A_{n-1}\|\leqslant\beta_{n-1} \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Если положить

$$c_0=L\|P(x_0)\|, \tag{20}$$

$$\mu=\sup_n\{\mu_n\} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

$$\gamma_0=\max\{\mu^2\beta_0/(2-\mu^2), \|E-P'(x_0)A_0\|\}, \tag{22}$$

$$\lambda_0 = C(1+\gamma_0), \tag{23}$$

$$\lambda_1 = C(1+\mu^2\beta_0/(2-\mu^2)), \tag{24}$$

$$\delta_n = \gamma_n + \tfrac{1}{2}L\lambda_n^2 \|P(x_n)\| \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{25}$$

$$r_1^{(n)} = \lambda_n \|P(x_0)\|/(1-\delta_n) \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{26}$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $x_0 \in H$, $S=\{x\in H: \|x-x_0\| \leqslant \varrho\}$ и на S выполнены следующие условия:*

1° *оператор $P(x)$ дифференцируем (по Фреше);*

2° *производная $P'(x)$ — самосопряженная и удовлетворяет условию Липшица*

$$\|P'(x)-P'(y)\| \leqslant L\|x-y\|;$$

3° *существует $[P'(x)]^{-1}$ и $\|[P'(x)]^{-1}\| \leqslant C$;*

4° $\sup\limits_n\{\mu_n\} = \mu < 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots);$

5° $\delta_0 = \gamma_0 + \tfrac{1}{2}L\lambda_0^2\|P(x_0)\| < 1;$

6° $\beta_1 = \mu^2\beta_0/(2-\mu^2) + \lambda_1^2 c_0\delta_0 \leqslant \beta_0.$

Тогда, если $r_1^{(0)} = \lambda_0\|P(x_0)\|/(1-\delta_0) \leqslant \varrho$, то уравнение $P(x)=0$ имеет в S решение x^*, $\|x_0-x^*\| \leqslant r_1^{(0)}$, к которому сходится последовательность (15), (16), *причем*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant r_1^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1}\delta_i,$$

где $\delta_i \to 0$ при $i\to\infty$.

Доказательство. Поскольку доказательство теоремы 6 в принципе не отличается от доказательства теоремы 1 в [1], то не станем повторять подробные рассуждения, а приведем здесь только основные соотношения.

Имея в виду, что $[P'(x_n)]^{-1} - A_n = [P'(x_n)]^{-1}(E-P'(x_n)A_n)$ и

$$\|W_2(t)\| = \sup_{-\mu\leqslant t\leqslant\mu}\left\{\frac{T_2(t/\mu)}{T_2(1/\mu)}\right\} \leqslant \frac{1}{T_2(1/\mu)} = \frac{\mu^2}{2-\mu^2},$$

на основании (9)—(12) получаем

$$\|E-P'(x_n)A_n\| \leqslant \|W_2(E-\alpha_{n-1}P'(x_n))\|\,\|E-P'(x_n)A_{n-1}\| \leqslant \frac{\mu_{n-1}^2\beta_{n-1}}{2-\mu_{n-1}^2},$$

где $\mu_{n-1} = \|E-\alpha_{n-1}P'(x_n)\|$.

В силу 3° теоремы 6

$$\|A_n\| = \|[P'(x_n)]^{-1} + [P'(x_n)]^{-1}(P'(x_n)A_n - E)\| \leqslant$$

$$\leqslant C(1+\mu_{n-1}^2\beta_{n-1}/(2-\mu_{n-1}^2)) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Учитывая оценку (ср. [3], стр. 996)

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|A_n P(x_n)\| \leqslant \lambda_n \|P(x_n)\| \leqslant \lambda_n \|P(x_0)\| \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$

а также то, что $P'(x)$ удовлетворяет условию Липшица, получаем

$$\|P'(x_{n+1})A_n - P'(x_n)A_n\| \leqslant \lambda_n L \|x_n - x_{n+1}\| \leqslant \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i$$

и на основании полученных результатов

$$\|E-P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant \|E-P'(x_n)A_n\| + \|P'(x_{n+1})A_n - P'(x_n)A_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \mu_{n-1}^2 \beta_{n-1}/(2-\mu_{n-1}^2) + \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Далее принимаем

$$\gamma_n = \mu^2 \beta_{n-1}/(2-\mu^2),$$
$$\beta_n = \mu^2 \beta_{n-1}/(2-\mu^2) + \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i,$$
$$\lambda_n = C(1+\mu^2\beta_{n-1}/(2-\mu^2)), \quad \text{где } n=1, 2, \ldots .$$

(Дальше см. доказательство теоремы 1 в [1].)

Следствие. В частном случае, если оператор $P'(x)$ — положительно определенный, т. е.

$$m(h,h) \leqslant (P'(x)h,h) \leqslant M(h,h), \quad \text{где } h \in H \text{ и } 0 < m \leqslant M,$$

то

$$C = m^{-1},$$
$$\lambda_0 = m^{-1}(1+\gamma_0),$$
$$\lambda_1 = m^{-1}(1+\mu^2\beta_0/(2-\mu^2)),$$
$$\mu_n = \max\{|1-\alpha_n m_n|, |1-\alpha_n M_n|\} = \frac{M_n - m_n}{M_n + m_n}, \text{ если } \alpha_n = \frac{2}{M_n + m_n},$$

а

$$m \leqslant m_n = m(x_n) = \inf_{\|y\|=1} (P'(x_n)y, y),$$
$$M \geqslant M_n = M(x_n) = \sup_{\|y\|=1} (P'(x_n)y, y).$$

Замечание 5. *Для решения уравнения* (1) *можно применить итерационный процесс*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A_n P(x_n), \\ A_{n+1} = A_n - \dfrac{2\alpha_n^2}{2-\mu_n^2}\left(\dfrac{2}{\alpha_n} E - P'(x_{n+1})\right)\left(P'(x_{n+1})A_n - E\right) \end{cases}$$

и сформулировать теоремы, аналогичные теоремам 2 *и* 5 *в* [1].

2. В статье [1] для решения уравнения (1) в вещественном банаховом пространстве E_1 мы применили итерационный процесс

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A_n P(x_n), & (27) \\ A_{n+1} = A_n [2E - P'(x_{n+1}) A_n], & (28) \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon_n \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

При изучении сходимости метода (27)—(28) в [1] мы предполагали существование оператора $[P'(x)]^{-1}$ и ограниченность его нормы, но как выяснится ниже, при хороших начальных приближениях x_0, A_0 можно обойтись без этих требований.

Пусть величины λ_n, γ_n и β_n удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|A_n\| \leqslant \lambda_n, \tag{29}$$

$$\|E - \varepsilon_n P'(x_n) A_n\| \leqslant \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{30}$$

$$\|E - P'(x_n) A_{n-1}\| \leqslant \beta_{n-1}. \tag{31}$$

Положим

$$c_0 = L \|P(x_0)\|, \tag{32}$$

$$\gamma_0 = \max\{\varepsilon_1 \beta_0^2 + 1 - \varepsilon_1, \|E - \varepsilon_0 P'(x_0) A_0\|\}, \tag{33}$$

$$\lambda_0 = \|A_0\|, \tag{34}$$

$$\lambda_1 = \|A_0\| (1 + \beta_0), \tag{35}$$

$$\delta_n = \gamma_n + \tfrac{1}{2} \varepsilon_n^2 \lambda_n^2 c_0 \prod_{i=0}^{n-1} \delta_i, \tag{36}$$

$$q_n = (1 + \beta_n) \delta_n \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{37}$$

$$r^{(n)} = \|A_0\| \|P(x_0)\| / (1 - q_n). \tag{38}$$

Тогда имеет место

Теорема 7. *Пусть* $x_0 \in E_1$, $S = \{x \in E_1, \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены* 1° *и* 2° *теоремы* 6* *и следующие условия:*

а) $\delta_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \lambda_0^2 c_0 < 1$;

б) $(1 + \beta_0)^2 \delta_0 < 1$;

в) $\beta_1 = \beta_0^2 + \varepsilon_1 \lambda_1^2 c_0 \delta_0 \leqslant \beta_0$;

г) $\varepsilon_{n-1} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \min(1, \varepsilon_{n-1} (1 + \beta_{n-1})^{-1} \delta_{n-1}^{-\frac{1}{2}})$, $\qquad n = 1, 2, \ldots$.

Тогда, если $r^{(0)} = \|A_0\| \|P(x_0)\| / (1 - q_0) \leqslant \varrho$, *то уравнение* $P(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r^{(0)}$, *к которому сходится последовательность* (27), (28), *причем*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant r^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} q_i,$$

где $q_i \to 0$ при $i \to \infty$.

---

* Кроме требования самосопряженности оператора $P'(x)$.

Доказательство. Из неравенств (29)—(31) получаем

$$\|E-\varepsilon_n P'(x_n)A_n\| = \|\varepsilon_n\{E-2P'(x_n)A_{n-1}+[P'(x_n)A_{n-1}]^2\}+$$

$$+E-\varepsilon_n E\| \leqslant \varepsilon_n\|E-P'(x_n)A_{n-1}\|^2+1-\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_n\beta_{n-1}^2+1-\varepsilon_n,$$

$$\|A_n\| \leqslant \|A_{n-1}\|\,\|2E-P'(x_n)A_{n-1}\| \leqslant \ldots \leqslant \|A_0\|\prod_{i=0}^{n-1}(1+\beta_i) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Далее берем

$$\gamma_n = \varepsilon_n\beta_{n-1}^2+1-\varepsilon_n \tag{39}$$

$$(n=1,2,\ldots),$$

$$\lambda_n = \|A_0\|\prod_{i=0}^{n-1}(1+\beta_i). \tag{40}$$

Так как (ср. [3], стр. 996)

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \gamma_n\|P(x_n)\|+\tfrac{1}{2}L\|Q_n(x_n)\|^2 \leqslant (\gamma_n+\tfrac{1}{2}\varepsilon_n^2\lambda_n^2L\|P(x_n)\|)\|P(x_n)\| \leqslant$$

$$\leqslant (\gamma_n+\tfrac{1}{2}\varepsilon_n^2\lambda_n^2L\|P(x_0)\|\prod_{i=0}^{n-1}\delta_i)\|P(x_n)\| = \delta_n\|P(x_n)\|,$$

где $Q_n(x_n)=\varepsilon_nA_nP(x_n)$,
то

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|\varepsilon_nA_nP(x_n)\| \leqslant \varepsilon_n\lambda_n\|P(x_n)\| \leqslant \|A_0\|\,\|P(x_0)\|\prod_{i=0}^{n-1}q_i \tag{41}$$

и

$$\|E-P'(x_n)A_n\| \leqslant \|E-P'(x_n)A_n\|+\|P'(x_n)A_n-P'(x_{n+1})A_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{n-1}^2+\varepsilon_n\lambda_n^2c_0\prod_{i=0}^{n-1}\delta_i = \beta_{n-1}^2+\varepsilon_nc_0\|A_0\|^2\prod_{i=0}^{n-1}(1+\beta_i)^2\delta_i.$$

Итак, можем принять

$$\beta_n = \beta_{n-1}^2+\varepsilon_n\lambda_n^2c_0\prod_{i=0}^{n-1}\delta_i \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Пусть $\beta_n \leqslant \beta_{n-1}$, $\gamma_n \leqslant \gamma_{n-1}$, $\delta_n \leqslant \delta_{n-1}$, тогда в силу (39) и (40), предположения г) и оценок $\|P(x_n)\| \leqslant \delta_{n-1}\|P(x_{n-1})\|$ имеем

$$\beta_{n+1} = \beta_n^2+\varepsilon_{n+1}c_0\|A_0\|^2\prod_{i=0}^{n}(1+\beta_i)^2\delta_i \leqslant \beta_{n-1}^2+\varepsilon_nc_0\|A_0\|^2\prod_{i=0}^{n-1}(1+\beta_i)^2\delta_i = \beta_n,$$

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = \varepsilon_{n+1}\beta_n^2-\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n\beta_{n-1}^2+\varepsilon_n \leqslant (\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n)(\beta_n^2-1) \leqslant 0,$$

откуда $\gamma_{n+1} \leqslant \gamma_n$ и

$$\delta_{n+1} = \gamma_{n+1}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_{n+1}^2\|A_0\|^2L\|P(x_0)\|\prod_{i=0}^{n}(1+\beta_i)^2\delta_i \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_n+\tfrac{1}{2}\varepsilon_n^2\|A_0\|^2L\|P(x_0)\|\prod_{i=0}^{n-1}(1+\beta_i)^2\delta_i = \delta_n.$$

На основании (41) легко видеть, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

В самом деле, для $m \geqslant n$

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \|A_0\| \, \|P(x_0)\| \sum_{k=n}^{m-1} \prod_{i=0}^{k-1} q_i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|A_0\| \, \|P(x_0)\| \, (1 - q_n^{m-n})}{1 - q_n} \prod_{i=0}^{n-1} q_i \leqslant r^{(n)} \prod_{i=0}^{n-1} q_i \leqslant r^{(0)} \prod_{i=0}^{n-1} q_i$$

и, следовательно,

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n, \quad P(x^*) = 0.$$

Замечание 6. *Если* $(1 + \beta_0)^2 \delta_0 < 1$, *то для итерационного процесса*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n A_n P(x_n), \\ A_{n+1} = A_n \{3E - 3P'(x_{n+1}) A_n + [P'(x_{n+1}) A_n]^2\} \end{cases}$$

ограниченность нормы обратного оператора $[P'(x)]^{-1}$ *несущественна, и можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 7.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **17**, № 4, 379 (1968).
2. Kielbasinski A., Studia Math., **24**, No. 1, 13 (1964).
3. Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, № 6, 995 (1964).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/VI 1968

O. VAARMANN

MÕNEDEST ITERATSIOONIMEETODEIST PÖÖRDOPERAATORI JÄRKJÄRGULISE APROKSIMEERIMISEGA. II

Artiklis käsitletakse meetodi (15)—(16) koonduvust võrrandi (1) lahendiks ja tõestatakse selle võrrandi lahendi olemasolu eeldusel, et eksisteerib tõkestatud pöördoperaator $[P'(x)]^{-1}$. Tõestatakse, et küllalt heade alglähendite korral iteratsiooniprotsess (27)—(28) koondub võrrandi (1) lahendiks ka juhul, kui me ei nõua pöördoperaatori olemasolu ega tõkestatust.

O. VAARMANN

ON SOME ITERATIVE METHODS WITH SUCCESSIVE APPROXIMATION OF THE INVERSE OPERATOR. II

A convergence theorem concerning the iterative method (15)—(16) and the existence of a solution of the equation (1) assuming existence of the bounded inverse operator $[P'(x)]^{-1}$ is proved. If any suppositions of the existence of an inverse operator are not made it is shown that for sufficiently good initial approximations the iterative process (27)—(28) converges to a solution of equation (1).