EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVIII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1969, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVIII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1969, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1969.1.12

LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. УЛЬМ, В. ПОЛЛЬ

О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

S. ULM, V. POLL. ÜLDISTATUD DIFERENTSSUHETE KONSTRUEERIMISEST

S. ULM, V. POLL. ON THE CONSTRUCTION OF GENERALIZED DIVIDED DIFFERENCES

Пусть X, Y — банаховы пространства, а $F(x)$ — нелинейный оператор, действующий из X в Y. В дальнейшем предполагается, что оператор $F(x)$ имеет непрерывные производные в смысле Фреше до требуемого порядка.

Определение 1. Оператор $F(x^1 \dots x^{n+1})$ называется разделенной разностью n-ого порядка для оператора $F(x)$ на элементах $x^1, \dots, x^{n+1} \in X$, если

1° для каждых фиксированных $x^1, \dots, x^{n+1} \in X$ оператор $F(x^1 \dots x^{n+1}) \in$ $\in [X^n \to Y]$ (см. [1]), причем

$$F(x^1 \dots x^{n+1})(x^1 - x^{n+1}) = F(x^1 \dots x^n) - F(x^2 \dots x^{n+1}); \tag{1}$$

2° если существует производная Фреше $F^{(n)}(x)$, то

$$F(\overbrace{x \dots x}^{n+1}) = \frac{1}{n!} F^{(n)}(x). \tag{2}$$

Разделенные разности, удовлетворяющие соотношениям (1), (2), можно построить по формуле

$$F(x^1 \dots x^{n+1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}[x^{n+1} + t_1(x^n - x^{n+1}) +$$

$$+ \dots + t_n(x^1 - x^2)]\, dt_n, \tag{3}$$

где интегрирование понимается в смысле Римана. Формула (3) является прямым обобщением понятия разделенной разности для функций одной переменной. Такие разделенные разности можно построить, например, для операторов, связанных с одним интегральным или дифференциальным уравнением [2]. Отметим, что определенные формулой (3) разделенные разности являются относительно своих аргументов $x^1, \dots, x^{n+1}$ симметричными.

Как показано в [2, 3], в банаховых пространствах, являющихся прямыми произведениями более простых банаховых пространств, определение разделенной разности в виде (3) нецелесообразно. Например, для функций многих переменных разделенные разности типа (3) не выражаются в общем через значения функций. Исходя из этого в [2-4] были построены более подходящие для применения разделенные разности первого, второго и третьего порядка для функций многих переменных.

На основании вышесказанного расширим определение для разделенных разностей n-ого порядка.

Определение 2. Операторы $F_{i i_1 \ldots i_{n-2}}(x^1 \ldots x^{n+1})$ называются разделенными разностями n-ого порядка для оператора $F(x)$ на элементах $x^1, \ldots, x^{n+1} \in X$, если

1° для каждых фиксированных $x^1, \ldots, x^{n+1} \in X$ операторы $F_{i i_1 \ldots i_{n-2}} \in \in [X^n \to Y]$, причем *

$$F_{i i_1 \ldots i_{n-2}}(x^1 \ldots x^{n+1})(x^i - x^{i+1}) =$$
$$= F_{i_1 \ldots i_{n-2}}(x^1 \ldots x^i x^{i+2} \ldots x^{n+1}) - F_{i_1 \ldots i_{n-2}}(x^1 \ldots x^{i-1} x^{i+1} \ldots x^{n+1}), \tag{4}$$

где $i = 1, \ldots, n$; $i_j = 1, \ldots, n-j$; $j = 1, \ldots, n-2$;

2° если существует производная Фреше $F^{(n)}(x)$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n-1} \ldots \sum_{i_{n-2}=1}^{2} F_{i i_1 \ldots i_{n-2}}(\overbrace{x \ldots x}^{n+1}) = F^{(n)}(x). \tag{5}$$

Отметим, что число соотношений (4) $n!$.

На основании определения 2 разделенные разности $F_{i i_1 \ldots i_{n-2}}$ n-ого порядка можно построить, например для функции многих переменных $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, в виде n-мерной матрицы:

$$(a_{l_1 \ldots l_n}^{i i_1 \ldots i_{n-2}})_{l_1, \ldots, l_n = 1, \ldots, m} =$$
$$= (a_{\pi_n(l_1) \ldots \pi_n(l_n)}^{\overbrace{1 \ldots 1}^{n+1}})_{l_1, \ldots, l_n = 1, \ldots, m}, \tag{6}$$

где π_n обозначает оператор преобразования, состоящий из произведений следующих циклов ([5], стр. 215):

$$\pi_n = (l_2, i_{3-i_{n-2}})(l_3, \ldots, l_{4-i_{n-3}}) \ldots (l_{n-1}, \ldots, l_{n-i_1})(l_n, \ldots, l_{n+1-i}).$$

n-Мерная матрица

$$(a_{l_1 \ldots l_n}^{\overbrace{1 \ldots 1}^{n+1}})_{l_1, \ldots, l_n = 1, \ldots, m}$$

состоит из 2^{n-1} различных отличных от нуля типов выражений:

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{k_1-1}} \int_0^1 \int_0^{t_{k_1+1}} \ldots \int_0^{t_{k_1+k_2-1}} \int_0^1 \ldots \ldots \int_0^{t_{k_1+\ldots+k_{n-1}-1}} \int_0^1 \ldots$$

---

* В частности, при $n = 1$
$F(x^1 x^2)(x^1 - x^2) = F(x^1) - F(x^2)$ и $F(xx) = F'(x)$.

$$\ldots \int\limits_{0}^{t_{k_1+\ldots+k_n-1}} F^{(n)}_{x_{l_1}^{k_1}\ldots x_{l_n}^{k_n}}(x_1^{n+1}, \ldots, x_{l_1-1}^{n+1}, \omega_{l_1}, x_{l_1+1}^{n+1-k_1}, \ldots$$

$$\ldots, x_{l_{1+k_1}-1}^{n+1-k_1}, \omega_{l_{1+k_1}}, x_{l_{1+k_1}+1}^{n+1-k_1-k_2}, \ldots$$

$$\ldots, x_{l_{1+\ldots+k_{n-1}}-1}^{n+1-k_1-\ldots-k_{n-1}}, \omega_{l_{1+\ldots+k_{n-1}}}, x_{l_{1+\ldots+k_{n-1}}+1}^{n+1-k_1-\ldots-k_n}, \ldots$$

$$\ldots, x_m^{n+1-k_1-\ldots-k_n})\, dt_n \ldots dt_1, \tag{7}$$

где

$$\omega_{l_{q_i}} = x_{l_{q_i}}^{n+2-q_i} + t_{q_i}(x_{l_{q_i}}^{n+1-q_i} - x_{l_{q_i}}^{n+2-q_i}) + \ldots +$$

$$+ t_{q_{i+1}-1}(x_{l_{q_i}}^{n+2-q_{i+1}} - x_{l_{q_i}}^{n+3-q_{i+1}}) \quad (q_i = 1 + k_1 + \ldots + k_i). \tag{8}$$

Индексы $l_1, \ldots, l_n$ и $k_1, \ldots, k_n$ удовлетворяют соотношениям:

а) $l_1 = \ldots = l_{k_1} < l_{k_1+1} = \ldots = l_{k_1+k_2} < \ldots < l_{k_1+\ldots+k_{n-1}+1} = \ldots = l_{k_1+\ldots+k_n}$;

б) $k_1 + \ldots + k_n = n$, причем

1) $1 \leqslant k_1 \leqslant n$; $\quad 0 \leqslant k_i \leqslant n - i + 1 \quad (i = 2, \ldots, n)$;

2) если $k_t = 1 + u$, то $k_{t+1} = \ldots = k_{t+u} = 0$, $k_{t+u+1} \neq 0$

$(t = 1, \ldots, n-1;\ u = 0, \ldots, n-1)$.

При этом умножение матрицы $(a_{l_1 \ldots l_n})$ на вектор $h = (h_1, \ldots, h_m) \in X$ определено по формуле

$$(a_{l_1\ldots l_n})h = (\sum_{l_n=1}^{m} a_{l_1\ldots l_n} h_{l_n})_{l_1, \ldots, l_{n-1}=1, \ldots, m}. \tag{9}$$

Пользуясь случаем, заметим, что в статье [3] неправильно записаны интерполяционные формулы Ньютона (2.4′), (2.5′), (2.8), (2.9). Поскольку билинейные формы $F(x'x''x''')_i h_1 h_2$ $(i = 1, 2)$ в общем несимметричные, то в этих формулах вместо $(x - x')(x - x'')$ следует записать $(x - x'')(x - x')$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврин М. К., Ученые записки ЛГУ, Сер. матем., № 137, вып. 19, 59 (1950).
2. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 1, 13 (1967).
3. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 2, 146 (1967).
4. Полль В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, № 1, 35 (1967).
5. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 1, М., 1954.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/VI 1968