

Л. СОССИ, П. КАРД

К ТЕОРИИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОПУСКАНИЯ СВЕТА ТОНКИМ НЕОДНОРОДНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Решение уравнения Риккати, определяющего коэффициент отражения монохроматического света на тонком неоднородном диэлектрическом слое, представлено в виде отношения двух бесконечных рядов. Доказана их сходимость. Коэффициент пропускания также выражен через один из этих рядов. Приведен пример, иллюстрирующий точность метода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим отражение и пропускание монохроматического света, падающего нормально на тонкий неоднородный диэлектрический слой. Показатель преломления $n(x)$ является внутри слоя непрерывной функцией координаты x в направлении, перпендикулярном слою. Слой ограничен плоскостями при $x=0$ и $x=h$, причем свет падает на слой в отрицательном направлении оси x . Показатель преломления исходной среды ($x > h$) обозначим через n , а показатель преломления подложки ($x < 0$) через n_0 . При $x=h$ пусть показатель преломления слоя непрерывно переходит в показатель преломления ограничивающей среды (т. е. $n(h) = n$), тогда как на границе с подложкой может иметь место скачок (т. е. $n(0) \neq n_0$). На рис. 1 показан примерный ход показателя преломления.

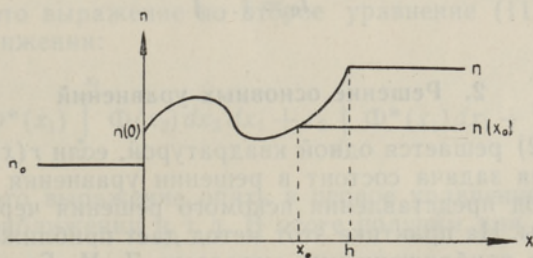


Рис. 1.

Как известно (см. [1], стр. 195), амплитудный коэффициент отражения r на таком слое определяется следующим уравнением типа Риккати:

$$dr/dx = (n'/2n)(1 - r^2) - 2iknr, \quad (1)$$

где k — волновое число, а n' означает производную dn/dx . Аналогично для амплитудного коэффициента пропускания t имеет место уравнение

$$dt/dx = -(n'/2n)rt - iknt. \quad (2)$$

Здесь t означает не просто отношение амплитуды прошедшей волны к амплитуде падающей, но произведение этого отношения на множитель $(n_0/n(x))^{1/2}$. Благодаря этому множителю энергетический коэффициент пропускания T выражается как

$$T = tt^*, \quad (3)$$

аналогично формуле энергетического коэффициента отражения

$$R = rr^*. \quad (4)$$

Отметим, что в силу сохранения энергии

$$R + T = rr^* + tt^* = 1. \quad (5)$$

Уравнения (1) и (2) определяют $r(x)$ и $t(x)$ как функции точки внутри слоя. Смысл этого состоит в том, что при любой толщине слоя $x_0 \leq h$ амплитудные коэффициенты отражения и пропускания были бы равны $r(x_0)$ и $t(x_0)$, если показатель преломления исходной среды был бы равен $n(x_0)$, т. е. $n(x) = n(x_0)$ при $x > x_0$. Иначе говоря, толщина слоя рассматривается как переменная величина, могущая иметь любое неотрицательное значение.

Начальные значения $r(0)$ и $t(0)$ коэффициентов отражения и пропускания, очевидно, равны:

$$r(0) \equiv r_0 = \frac{n(0) - n_0}{n(0) + n_0} \quad (6)$$

и

$$t(0) \equiv t_0 = \frac{2(n_0 n(0))^{1/2}}{n(0) + n_0}. \quad (7)$$

В частном случае, если $n(0) = n_0$, то

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= 0, \\ t_0 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2. Решение основных уравнений

Уравнение (2) решается одной квадратурой, если $r(x)$ уже известно. Поэтому главная задача состоит в решении уравнения (1). Здесь мы предложим метод представления искомого решения через бесконечные сходящиеся ряды. На практике этот метод дает приближенные решения. По сравнению с приближенными методами Л. М. Бреховских (см. [1], стр. 197—200) наш метод, не уступая им в точности, более изящен и дает более компактные формулы.

Представим искомое решение в виде

$$(1) \quad r(x) = (F(x)/G(x)) \exp(-2ik \int_0^x n(u) du), \quad (9)$$

где $F(x)$ и $G(x)$ — две новые функции.

Подстановка выражения (9) в уравнение (1) дает

$$G(dF/dx) - F(dG/dx) = (n'/2n) [G^2 \exp(2ik \int_0^x n(u) du) - F^2 \exp(-2ik \int_0^x n(u) du)]. \quad (10)$$

Это уравнение удовлетворяется, если положим

$$\left. \begin{aligned} dF/dx &= \Phi G \\ dG/dx &= \Phi^* F, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= (n'/2n) \exp(2ik \int_0^x n(u) du), \\ \Phi^*(x) &= (n'/2n) \exp(-2ik \int_0^x n(u) du). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Таким образом, мы привели уравнение Риккати к системе (11) двух линейных уравнений первого порядка. Для решения этой системы целесообразно применить метод итераций.

В качестве первого приближения примем $G = \text{const}$, причем эту постоянную, в силу однородности выражения (9) относительно F и G , можно принять равной единице:

$$G = 1. \quad (13)$$

Подставляя в первое уравнение (11), находим в качестве первого приближения для F формулу

$$F = \int_0^x \Phi(x_1) dx_1 + r_0. \quad (14)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (11), находим G во втором приближении:

$$G = \int_0^x \Phi^*(x_1) \int_0^{x_1} \Phi(x_2) dx_2 dx_1 + r_0 \int_0^x \Phi^*(x_1) dx_1 + 1. \quad (15)$$

Подставляя это выражение опять в первое уравнение (11), получим F во втором приближении и т. д. В итоге получим для F и G следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} F &= f + r_0 g^* \\ G &= g + r_0 f^*, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где f и g означают бесконечные ряды

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x \Phi(x_1) \int_0^{x_1} \Phi^*(x_2) \int_0^{x_2} \Phi(x_3) \dots \int_0^{x_{2m}} \Phi(x_{2m+1}) dx_{2m+1} dx_{2m} \dots dx_1 \quad (17)$$

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x \Phi^*(x_1) \int_0^{x_1} \Phi(x_2) \int_0^{x_2} \Phi^*(x_3) \dots \int_0^{x_{2m-1}} \Phi(x_{2m}) dx_{2m} dx_{2m-1} \dots dx_1, \quad (18)$$

причем первый член ($m=0$) последнего ряда равен единице.

Итак, мы нашли решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $r(0) = r_0$, в виде

$$r(x) = \exp\left(-2ik \int_0^x n(u) du\right) (f + r_0 g^*) (g + r_0 f^*)^{-1}. \quad (19)$$

В частном случае, когда $r_0 = 0$, имеем

$$r(x) = (f/g) \exp\left(-2ik \int_0^x n(u) du\right). \quad (20)$$

Теперь докажем сходимость рядов (17) и (18). Обозначим их общие члены через f_m и g_m , так что

$$\left. \begin{aligned} f &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m \\ g &= \sum_{m=0}^{\infty} g_m \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Очевидно,

$$|f_m| \leq \int_0^x |\Phi(x_1)| \int_0^{x_1} |\Phi(x_2)| \dots \int_0^{x_{2m}} |\Phi(x_{2m+1})| dx_{2m+1} \dots dx_1$$

и

$$|g_m| \leq \int_0^x |\Phi(x_1)| \int_0^{x_1} |\Phi(x_2)| \dots \int_0^{x_{2m-1}} |\Phi(x_{2m})| dx_{2m} \dots dx_1.$$

В этих интегралах мы можем произвести все $(2m+1)!$ или $(2m)!$ перестановки индексов, причем значение интеграла не изменится. Но сумма всех интегралов, полученных в результате перестановок, равна

$$\left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right)^p,$$

где $p = 2m + 1$ или $p = 2m$. Отсюда вытекает, что

$$|f_m| \leq \frac{1}{(2m+1)!} \left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right)^{2m+1}$$

$$|g_m| \leq \frac{1}{(2m)!} \left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right)^{2m}.$$

Следовательно, абсолютно сходящиеся ряды

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right)^{2m+1} = \\ = \operatorname{sh} \left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right) = \frac{n(x) - n(0)}{2(n(0)n(x))^{1/2}} \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right)^{2m} = \\ = \operatorname{ch} \left(\int_0^x |\Phi(u)| du \right) = \frac{n(x) + n(0)}{2(n(0)n(x))^{1/2}} \end{aligned} \quad (23)$$

являются мажорантными относительно рядов (17) и (18), чем и доказывается абсолютная сходимость последних.

Переходим к уравнению (2). Подставляя в него вместо r выражение (19) и интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \ln t(x) - \ln t(0) = -ik \int_0^x n(u) du - \\ - \int_0^x \exp(-2ik \int_0^{x_1} n(u) du) (n'/2n(x_1)) \frac{f(x_1) + r_0 g^*(x_1)}{g(x_1) + r_0 f^*(x_1)} dx_1. \end{aligned}$$

Иначе, в силу формул (12) можно написать

$$\ln t(x) - \ln t(0) = -ik \int_0^x n(u) du - \int_0^x \Phi^*(x_1) \frac{f(x_1) + r_0 g^*(x_1)}{g(x_1) + r_0 f^*(x_1)} dx_1. \quad (24)$$

Но функции f и g , как вытекает из формул (17) и (18), удовлетворяют дифференциальным уравнениям такой же формы, как и F и G (см. (11)), т. е.

$$\left. \begin{aligned} df/dx &= \Phi g \\ dg/dx &= \Phi^* f. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Следовательно, формула (24) принимает вид

$$\ln t(x) - \ln t(0) = -ik \int_0^x n(u) du - \int_0^x \frac{dg/dx_1 + r_0 (df^*/dx_1)}{g(x_1) + r_0 f^*(x_1)} dx_1,$$

откуда

$$t(x) = t_0 \exp(-ik \int_0^x n(u) du) (g + r_0 f^*)^{-1}. \quad (26)$$

В случае, если скачок показателя преломления при $x=0$ отсутствует, то, согласно формулам (8),

$$t(x) = g^{-1} \exp(-ik \int_0^x n(u) du). \quad (27)$$

Итак, формулы (19) и (26), или, при $n(0) = n_0$, формулы (20) и (27) дают решение уравнений (1) и (2). Убедимся дополнительно в том, что, как и должно быть,

$$rr^* + tt^* = 1. \quad (28)$$

В самом деле, из формул (19) и (26) вытекает

$$rr^* + tt^* - 1 = \frac{t_0^2 - (1 - r_0^2)(gg^* - ff^*)}{(g + r_0 f^*)(g^* + r_0 f)}. \quad (29)$$

Но, в силу уравнений (25),

$$gg^* - ff^* = 1. \quad (30)$$

В самом деле, умножая первое из уравнений (25) на $-f^*$, второе на g^* , беря комплексно-сопряженные от обоих и складывая все четыре уравнения, находим

$$\frac{d}{dx}(gg^* - ff^*) = 0,$$

откуда

$$gg^* - ff^* = \text{const.}$$

Но так как при $x=0$ $f=0$ и $g=1$, то и получается формула (30). Теперь, поскольку $r_0^2 + t_0^2 = 1$, формула (29) дает

$$rr^* + tt^* - 1 = 0,$$

откуда и следует (28).

3. Пример

Чтобы иллюстрировать вышеизложенный метод, выберем такой пример, где точное решение уравнения (1) можно найти элементарным путем. Это даст возможность сравнить точное решение с приближенными. Пусть (ср. [1], стр. 202)

$$n(\xi) = v(\xi + v/n_0)^{-1}, \quad (31)$$

где

$$\xi = x/h \quad (32)$$

есть безразмерная координата и

$$v = nn_0/(n_0 - n). \quad (33)$$

Таким образом, скачок показателя преломления при $x=0$ в нашем примере отсутствует. На рис. 2 показан график $n(\xi)$, причем выбраны значения

$$\left. \begin{aligned} n_0 &= \frac{25}{9} \\ n &= \frac{25}{18} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

так что

$$v = \frac{25}{9}. \quad (35)$$

Подставляя выражение (31) в уравнение (1), находим уравнение с разделенными переменными

$$(r^2 - 4i\alpha vr - 1)^{-1} dr = \\ = (1/2) (\xi + v/n_0)^{-1} d\xi, \quad (36)$$

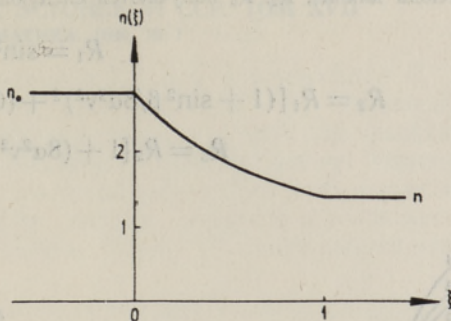


Рис. 2.

где

$$\alpha = kh \quad (37)$$

есть безразмерная спектральная переменная.

Решение уравнения (36) при $\xi = 1$ имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} r &= [-\mu \operatorname{cth}((\mu/2) \ln(n_0/n)) \mp 2i\alpha v]^{-1}, & \alpha < (2|v|)^{-1} \\ r &= \ln(n_0/n) [-2 \mp i \ln(n_0/n)]^{-1}, & \alpha = (2|v|)^{-1} \\ r &= [-\mu \operatorname{ctg}((\mu/2) \ln(n_0/n)) \mp 2i\alpha v]^{-1}, & \alpha > (2|v|)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$\mu = |(1 - 4v^2\alpha^2)^{1/2}|, \quad (39)$$

а двойной знак соответствует двойному знаку в неравенстве $v \geq 0$. Из этих формул находим

$$\left. \begin{aligned} R &= [\mu^2 \operatorname{cth}^2((\mu/2) \ln(n_0/n)) - \mu^2 + 1]^{-1}, & \alpha < (2|v|)^{-1} \\ R &= \ln^2(n_0/n) [\ln^2(n_0/n) + 4]^{-1}, & \alpha = (2|v|)^{-1} \\ R &= [\mu^2 \operatorname{ctg}^2((\mu/2) \ln(n_0/n)) + \mu^2 + 1]^{-1}, & \alpha > (2|v|)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Перейдем к приближенным решениям. Ограничимся в разложениях (17) и (18) для f и g только двумя первыми членами

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \quad \text{и} \quad g = 1 + g_2. \quad (41)$$

Тогда, соответственно кратности интегралов в отдельных членах, получим следующие три последовательных приближения:

$$R_1 = \hat{f}_1 \hat{f}_1^*, \quad (42)$$

$$R_2 = \hat{f}_1 \hat{f}_1^* / (1 + g_2) (1 + g_2^*) \quad (43)$$

и

$$R_3 = (\hat{f}_1 + \hat{f}_2) (\hat{f}_1^* + \hat{f}_2^*) / (1 + g_2) (1 + g_2^*). \quad (44)$$

Вычисление по формулам (12), (17) и (18) дает следующие результаты:

$$\hat{f}_1(h) = -(2\alpha v)^{-1} \exp(i\beta) \sin \beta, \quad (45)$$

где

$$\beta = \alpha v \ln(n_0/n) \quad (46)$$

$$g_2(h) = i(8\alpha^2 v^2)^{-1} [\exp(-i\beta) \sin \beta - \beta] \quad (47)$$

$$\hat{f}_2(h) = (16\alpha^3 v^3)^{-1} \exp(i\beta) (\beta \cos \beta - \sin \beta). \quad (48)$$

Отсюда для R_1 , R_2 , R_3 получаются следующие выражения:

$$R_1 = \sin^2 \beta / 4\alpha^2 v^2 \quad (49)$$

$$R_2 = R_1 [(1 + \sin^2 \beta / 8\alpha^2 v^2)^2 + (64\alpha^4 v^4)^{-1} (\beta - \sin \beta \cos \beta)^2]^{-1} \quad (50)$$

$$R_3 = R_2 [1 + (8\alpha^2 v^2)^{-1} (1 - \beta \operatorname{ctg} \beta)]^2. \quad (51)$$

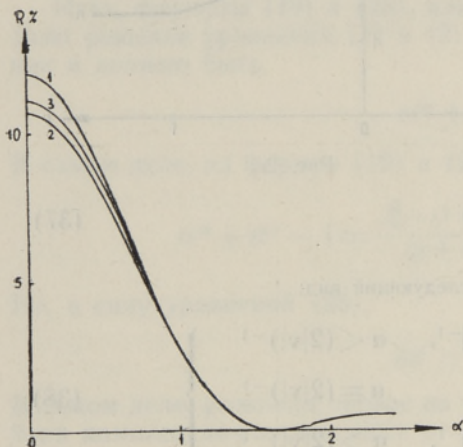


Рис. 3.

На рис. 3 приведены графики, вычисленные по формулам (40) и (49)—(51) при указанных выше (см. (34)) значениях показателей преломления. Следует отметить, что R_1 и R_2 при малых частотах заметно отличаются от точного значения R , но R_3 настолько близко к R , что обе кривые сливаются в одну. Относительная разность $|1 - R_3/R|$ не превышает 0,002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, М., 1957.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
26/1 1967

L. SOSSI, P. KARD

VALGUSE PEEGELDUMISE JA LÄBILASKVUSE TEORIAST ÕHUKESSEL MITTEHOMOGEENSEL DIELEKTRILISEL KIHIL

Valguse peegeldumiskoeffitsient õhukesel mittehomogeensel dielektrilisel kihil on avaldatud Riccati tüüpi võrrandi (1) lahendina lõpmatute koonduvate ridade kaudu (valemid (17)—(20)). Analoogiliselt on avaldatud ka läbilaskvuse koeffitsient (valemid (26)—(27)). Konkreetse näite najal (valemid (31)—(34)) on näidatud, et kolmas lähend langeb täpse lähendiga ühte relatiivse veaga mitte üle 0,002.

L. SOSSI, P. KARD

ON THE THEORY OF THE REFLEXION AND TRANSMISSION OF LIGHT BY A THIN INHOMOGENEOUS DIELECTRIC FILM

The reflectance of a thin inhomogeneous dielectric film is expressed as the solution of the Riccati equation (1) in terms of two infinite convergent series (see formulae (17)—(20)). Similarly the transmittance is expressed by means of one of them (see formulae (26)—(27)). This method is illustrated by a numerical example (see formulae (31)—(34)), where the third approximate solution agrees with the exact solution within an error of no more than 0.002.