EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.04

Н. ВЕКСЛЕР

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

На основе теории оболочек типа Тимошенко исследуются осесимметричные нестационарные процессы деформации тороидальной и конической оболочек, а также предельных случаев конической оболочки — цилиндрической оболочки и круглой плиты, вызванные резкими динамическими краевыми воздействиями.

1. Исходные уравнения. Уравнения движения тороидальной оболочки имеют вид

$$\begin{gathered}
(\partial_\alpha^2+c\partial_\alpha-\nu d-c^2-\varkappa^2-\partial_\tau^2)u+\varkappa^2\psi+[(1+\nu d+\varkappa^2)\partial_\alpha+g]w=0 \\
\varkappa^2 u+[-\varkappa^2+a^2(\partial_\alpha^2+c\partial_\alpha-\nu d-c^2-\partial_\tau^2)]\psi-\varkappa^2\partial_\alpha w=0 \\
-[(1+\nu d+\varkappa^2)\partial_\alpha+c(\nu+d+\varkappa^2)]u+\varkappa^2(\partial_\alpha+c)\psi+ \\
+[\varkappa^2(\partial_\alpha^2+c\partial_\alpha)-1-2\nu d-d^2-\partial_\tau^2]w=0.
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
c=\frac{\cos\alpha}{\lambda+\sin\alpha} \qquad d=\frac{\sin\alpha}{\lambda+\sin\alpha} \qquad g=\frac{\lambda c}{\lambda+\sin\alpha} \\
a=\frac{hk_\alpha}{\sqrt{3}} \qquad k_\alpha=1 \qquad \tau=\frac{c_1 t}{A} \qquad \varkappa=\frac{c_2}{c_1} \\
c_1=\left[\frac{E}{\varrho(1-\nu^2)}\right]^{1/2} \qquad c_2=\left[\frac{Ek_T}{2\varrho(1+\nu)}\right]^{1/2}.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Тороидальная оболочка образуется при вращении кольца толщиной $2h$ вокруг оси, отстоящей от центра кольца на расстоянии λ.

В формулах (1.1), (1.2) используются следующие обозначения: α — координата вдоль дуги меридиана; $A=k_\alpha=1$ — параметр Ляме срединной поверхности оболочки вдоль меридиана; u, w — безразмерные (деленные на k_α) тангенциальное и нормальное перемещения; ψ — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки; c_1, c_2 — скорости распространения первого и второго фронтов волн в теории оболочек типа Тимошенко; k_T — коэффициент сдвига.

Безразмерные усилия и моменты в тороидальной оболочке определим по формулам

$$\begin{gathered}
T_\alpha=(\partial_\alpha+\nu c)u+(1+\nu d)w \qquad T_\beta=(\nu\partial_\alpha+c)u+(\nu+d)w \\
N_\alpha=-u+\psi+\partial_\alpha w \\
M_\alpha=(\partial_\alpha+\nu c)\psi \qquad M_\beta=(\nu\partial_\alpha+c)\psi.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Уравнения движения конической оболочки представим в виде

$$(\partial_\alpha^2 + b\partial_\alpha - b^2 - \partial_\tau^2)u + (\nu f\partial_\alpha + bf)w = 0$$

$$[-\varkappa^2 + a^2(\partial_\alpha^2 + b\partial_\alpha - b^2 - \partial_\tau^2)]\psi - \varkappa^2\partial_\alpha w = 0 \qquad (1.4)$$

$$-(\nu f\partial_\alpha + bf)u + \varkappa^2(\partial_\alpha + b)\psi + [\varkappa^2(\partial_\alpha^2 + b\partial_\alpha) - b^2 - \partial_\tau^2]w = 0.$$

Здесь

$$b = \frac{\sin\gamma}{\lambda + \alpha\sin\gamma} \qquad f = \frac{\cos\gamma}{\lambda + \alpha\sin\gamma} \qquad (1.5)$$

γ — угол конусности, α — координата вдоль образующей; остальные обозначения имеют прежний смысл.

Безразмерные усилия и моменты в конической оболочке определим по формулам

$$T_\alpha = (\partial_\alpha + \nu b)u + \nu fw \qquad T_\beta = (\nu\partial_\alpha + b)u + fw \qquad (1.6)$$

$$N_\alpha = \psi + \partial_\alpha w$$

$$M_\alpha = (\partial_\alpha + \nu b)\psi \qquad M_\beta = (\nu\partial_\alpha + b)\psi.$$

При $\gamma = 0$ коническая оболочка вырождается в цилиндрическую, а при $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ — в круглую плиту (рис. 1). В последнем случае система уравнений движения (1.4) распадается на две — первое уравнение описывает тангенциальную деформацию плиты, а система из двух оставшихся уравнений — изгибную и сдвиговую деформации.

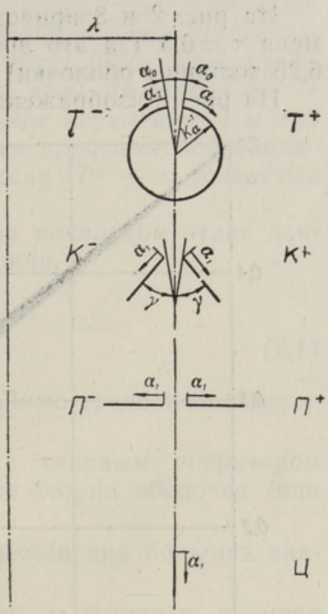

Рис. 1.

Начальные условия при $\tau = 0$

$$u = \psi = w = \partial_\tau u = \partial_\tau\psi = \partial_\tau w = 0. \qquad (1.7)$$

Краевые условия при $\alpha_1 = 0$ $(\alpha_1 = \alpha - \alpha_0)$

$$\partial_\tau u = H(\tau) \qquad \psi = w = 0. \qquad (1.8)$$

В той части оболочки, которой еще не достигли волны деформации, сохраняется покой

$$u(\alpha_1, \tau) = \psi(\alpha_1, \tau) = w(\alpha_1, \tau) = 0 \qquad (1.9)$$

$$\alpha_1 > \tau.$$

Рассматривается начальный этап движения. Отражение волн не исследуется.

Используя результаты исследования разрывов на фронтах волн [1] и применяя модифицированный метод сеток [2], основная идея которого состоит в предварительном выделении разрывных частей вычисляемых функций, по программам, составленным в автокоде «Инженер» [3], на ЭЦВМ «Минск-2» проводился численный расчет.

Были выбраны следующие параметры:

$$\nu=0{,}3, \qquad \varkappa^2=0{,}301, \qquad hk_\alpha=0{,}04, \qquad \lambda=5{,}0, \qquad \gamma=\pm\frac{\pi}{4},\ \ 0,\ \ \pm\frac{\pi}{2}. \tag{1.10}$$

Шаги сетки по координате и времени приняты равными

$$l_\alpha=0{,}004, \qquad l_\tau=\frac{1}{2}\,l_\alpha. \tag{1.11}$$

Принятое соотношение между шагами расчетной сетки обеспечивает устойчивость метода сеток.

На толщине оболочки умещается 20 шагов.

Параметр α_0 при тороидальной оболочке принят равным полутолщине оболочки

$$|\alpha_0|=0{,}04. \tag{1.12}$$

При других объектах параметры α_0 подобраны таким образом, что края оболочек находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения.

2. Численные результаты. Для краткости письма обозначим переходной процесс деформации оболочки символом по первой букве геометрической поверхности оболочки; при удалении выходящих волн, вызванных начальным возмущением, от оси вращения присвоим символу процесса верхний индекс «плюс», в противном случае — «минус».

На рис. 2 и 3 приводятся диаграммы, относящиеся к моменту времени $\tau=0{,}5$ (за это время первый фронт прошел расстояние, равное 6,25 толщины оболочки).

На рис. 2 изображены графики тангенциального перемещения u при

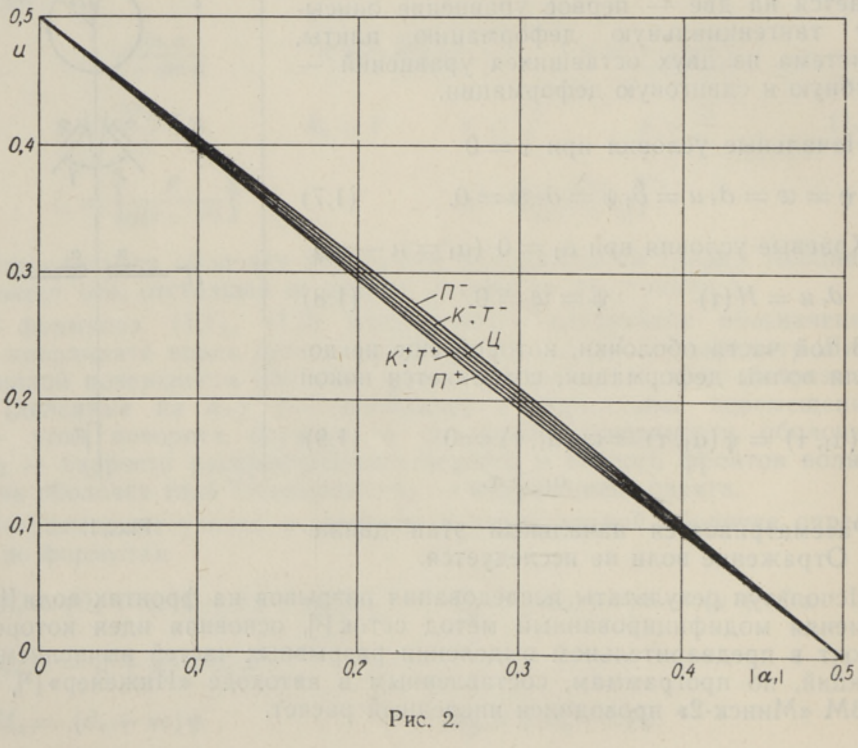

Рис. 2.

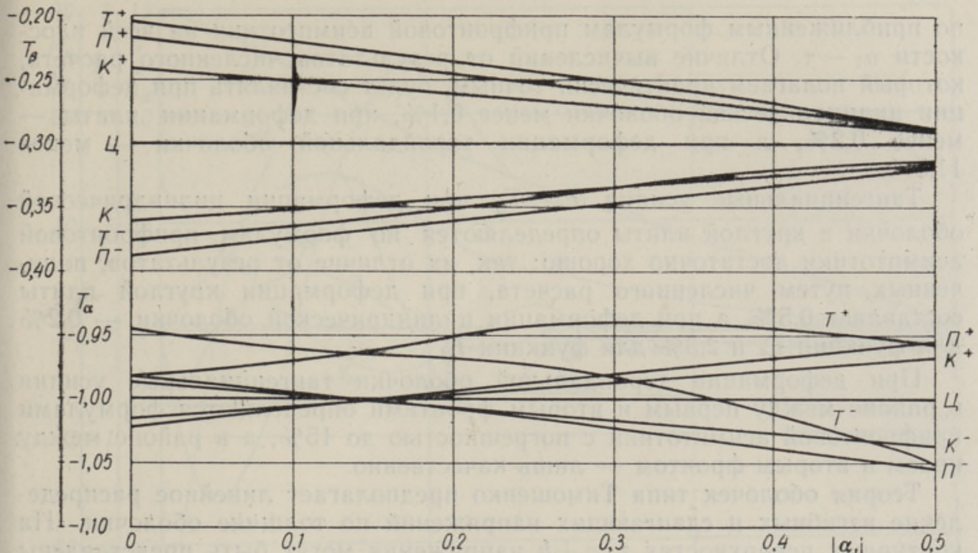

Рис. 3

процессах $T^\pm$, $K^\pm$, $П^\pm$, $Ц$, а на рис. 3 — графики тангенциальных усилий T_α и T_β.

Как показывают результаты численного расчета, при принятых краевых условиях в начале движения ($\tau = 0{,}5$) тангенциальные перемещения и усилия являются доминирующими. Они могут быть определены по формулам прифронтовой асимптотики [1] на всей плоскости $\alpha_1 - \tau$ с высокой степенью точности. Так, тангенциальное перемещение u при процессах $K^\pm$, $П^\pm$, $Ц$ определяется по формулам прифронтовой асимптотики с точностью до 0,1%, а при процессах $T^\pm$ — с точностью до 2%.

При тангенциальном краевом воздействии на начальном этапе движения оболочки ведут себя как трубчатые стержни.

Уравнение движения стержня имеет вид

$$(\partial_\alpha^2 + B^{-1}\partial_\alpha B \partial_\alpha - \partial_\tau^2)\, u = 0\,. \tag{2.1}$$

Здесь $B(\alpha)$ — радиус стержня (коэффициент Ляме срединной поверхности оболочки).

Левая часть уравнения (2.1) совпадает с главным оператором в системе уравнений прифронтовой асимптотики теории оболочек типа Тимошенко.

Перейдем к рассмотрению переходных процессов при бóльших значениях времени.

Ниже приводятся диаграммы, относящиеся к моменту времени $\tau = 1{,}5$ (за это время первый фронт прошел расстояние, равное 18,75 толщины оболочки).

На рис. 4 изображены графики, характеризующие переходные процессы деформации $Ц$ и $П^\pm$. Графики процесса $Ц$ изображены сплошной линией, процесса $П^+$ — пунктирной, а процесса $П^-$ — штрих-пунктирной линией.

На рис. 5 приводятся диаграммы, характеризующие процесс T^+.

Как и ранее, тангенциальные перемещения u могут быть определены по приближенным формулам прифронтовой асимптотики на всей плоскости $\alpha_1 - \tau$. Отличие вычислений от результатов численного расчета, который полагаем практически точным, будет составлять при деформации цилиндрической оболочки менее 0,1%, при деформации плиты — менее 0,2%, а при деформации тороидальной оболочки — менее 11,5%.

Тангенциальные усилия T_α, T_β при деформации цилиндрической оболочки и круглой плиты определяются по формулам прифронтовой асимптотики достаточно хорошо; так, их отличие от результатов, полученных путем численного расчета, при деформации круглой плиты составляет 0,5%, а при деформации цилиндрической оболочки — 0,2% для функции T_α и 2,5% для функции T_β.

При деформации тороидальной оболочки тангенциальные усилия в районе между первым и вторым фронтами определяются формулами прифронтовой асимптотики с погрешностью до 15%, а в районе между краем и вторым фронтом — лишь качественно.

Теория оболочек типа Тимошенко предполагает линейное распределение изгибных и сдвигающих напряжений по толщине оболочки. На контурных поверхностях $z = \pm h$ напряжения могут быть представлены в виде

$$\sigma_j = E_p(T_j + hk_\alpha M_j) \qquad (j = \alpha, \beta;\ E_p = E/(1-\nu^2)) \qquad \tau_{z\alpha} = E_p\varkappa^2 N_\alpha. \qquad (2.2)$$

Вклад изгибающих моментов в напряжения при деформации цилиндрической оболочки не превышает 11%.

При деформации тороидальной оболочки он не превышает 11% в районе между первым и вторым фронтами; этот вклад растет с приближением к краю и на краю превышает вклад тангенциальных усилий

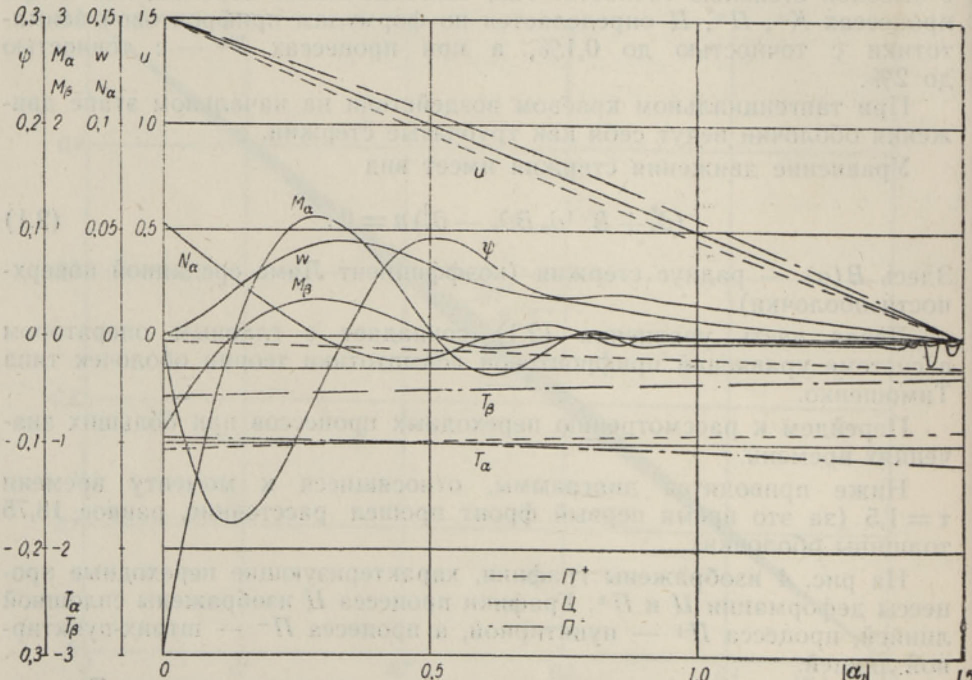

Рис. 4.

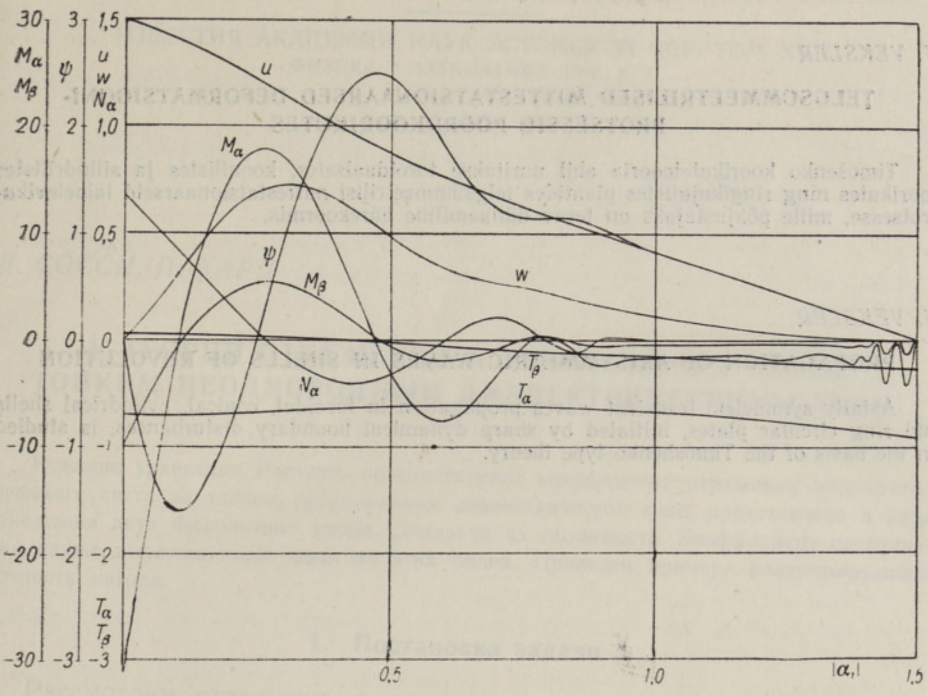

Рис. 5.

в тангенциальные напряжения. Кривизна срединной поверхности оболочки вызывает появление сильного краевого эффекта даже при тангенциальных краевых условиях.

3. Некоторые обобщения. Проведенные численные расчеты нестационарных процессов деформации оболочек вращения, вызванных краевыми воздействиями, убеждают в том, что на начальном этапе движения ($\tau = 0{,}5$) доминирующие факторы переходного процесса — перемещения, усилия и моменты (тангенциальные при тангенциальных краевых воздействиях и нетангенциальные при изгибных и сдвиговых краевых воздействиях) — для оболечек вращения различных геометрических форм близки между собой и их различия определяются, в основном, различием в жесткости оболочки (радиусе $B(\alpha)$ трубчатого стержня). Секундарные факторы для оболочек вращения различных геометрических форм значительно разнятся.

Кривизны срединной поверхности оболочки (вдоль параллели, меридиана, а также гауссова) почти не влияют на характер нестационарного процесса деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер Н. Д., Исследование фронтовых разрывов при осесимметричной деформации оболочек вращения и круглой плиты, Сб. Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Таллин, 1967.
2. Векслер Н. Д., Мянниль А. И., Нигул У. К., Прикл. мех., 1, № 12 (1965).
3. Неменман М. Е., Цегельский В. И., Матюшевская И. И., Автокод для решения инженерных задач на машине «Минск-2». Минск, 1965.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24/VII 1967

N. VEKSLER

TELGSÜMMEETRILISED MITTESTATSIONAARSED DEFORMATSIOONIPROTSESSID PÖÖRDKOORIKUTES

Timošenko koorikuteteooria abil uuritakse toroidaalsetes, koonilistes ja silindrilistes koorikutes ning ringikujulistes plaatides telgsümmeetrilisi mittestatsionaarseid lainelevikuprotsesse, mille põhjustajaks on terav dünaamiline äärekoormis.

N. VEKSLER

PROPAGATION OF AXISYMMETRIC WAVES IN SHELLS OF REVOLUTION

Axially symmetric transient waves propagation in toroidal, conical, cylindrical shells and ring circular plates, initiated by sharp dynamical boundary disturbances, is studied on the basis of the Timoshenko type theory.