EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.01

И. КЕЙС

К ОПТИМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СТАЦИОНАРНОГО СПУТНИКА

Сообщение первое

Известно, что уравнения движения спутника относительно притягивающего центра допускают относительное равновесие — решение, соответствующее движению спутника по круговой орбите определенного радиуса с постоянной угловой скоростью ω_0 так, что главные центральные оси системы расположены по касательной, радиусу-вектору и бинормали орбиты, причем вторая ось пересекается с экватором небесного тела в фиксированной точке. Это решение имеет непосредственное отношение к функционированию систем спутников «Синком», «Эрли Бэрд», «АТС», находящихся на стационарных орбитах. Задача пассивной стабилизации отмеченного движения решена в ограниченной и в полной постановке В. Белецким [1]. Так, для малых возмущений им указаны достаточные условия устойчивости, которые в упрощенном виде определяют два неравенства на главные моменты инерции спутника. Далее, в работах [2, 3] изложены способы частичной стабилизации другого движения твердого тела, при котором оно фиксировано относительно неподвижных звезд и обладает закрепленной точкой в поле сил, результирующий момент которых относительно последней принят равным нулю.

В предлагаемой работе, используя слабую взаимосвязь поступательного и вращательного движений для реальных спутников, рассмотрена обратная задача синтеза оптимального идеального регулятора асимптотической стабилизации относительного равновесия спутника-гиростата в ограниченной постановке. Для решения задачи получены достаточные условия и отмечена возможность ее дальнейшей редукции в смысле полной асимптотической стабилизации, а также при новом выборе критерия оптимальности — качества переходного процесса.

1. Исходя из ограниченной постановки задачи, предположим, что центр масс спутника «висит» над фиксированной точкой экватора небесного тела, находясь на постоянном удалении R_0 от его притягивающего центра. Подвижную систему координат $Oxyz$ совместим с главной центральной системой координат для спутника-гиростата S. Для определения положения репера $Oxyz$ относительно системы координат Кенига $O\xi\eta\zeta$ используем проекции взаимно ортогональных единичных векторов $\bar{\sigma}$ и $\bar{\beta}$, из которых первый направлен из притягивающего центра в O, а второй — по бинормали к плоскости стационарной круговой орбиты. Выбор этих переменных обеспечивает стационарность стабилизируемого частного движения. Пусть $\bar{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — угловая скорость вращения репера $Oxyz$ относительно $O\xi\eta\zeta$; μ — гравитационная постоянная центра; поле сил притягивающего центра определяется следующим приближением силовой функции

$$U(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \mu M R_0^{-1} - 3\mu (2R_0^3)^{-1} [G_1\sigma_1^2 + G_2\sigma_2^2 + G_3\sigma_3^2 - 3^{-1}(G_1 + G_2 + G_3)];$$

M — масса S; G_1, G_2, G_3 — главные центральные моменты инерции S. Вектор $\overline{K}(\overline{\Omega})$ момента количества движения S в репере $Oxyz$ имеет проекции $G_1\omega_1 + k_1$, $G_2\omega_2 + k_2$, $G_3\omega_3 + k_3$. Гиростатические переменные k_1, k_2, k_3 в начале рассмотрения имеют значения постоянных o, k_0, o. С большой степенью точности [1] можно считать, что постоянная угловая скорость $\omega_0 = -(MR_0)^{-1}(\partial U/\partial R)_0$ отличается от величины $(\mu R_0^{-3})^{1/2}$ на величину порядка $\omega_0 l^2 R_0^{-2}$ (где l — размер S), весьма малую для реальных спутников.

Уравнения движения спутника относительно центра масс при наличии регулятора в такой ограниченной постановке

$$d\overline{K}/dt + [\overline{\Omega}, \overline{K}] = \nu^2 [\mathrm{grad}_\sigma \Phi, \overline{\sigma}] + \overline{u} \quad (\nu^2 = 3\omega_0^2)$$
$$d\overline{\sigma}/dt = [\overline{\sigma}, \overline{\Omega} - \omega_0\overline{\beta}] \tag{1.0}$$
$$d\overline{\beta}/dt = [\overline{\beta}, \overline{\Omega}]$$

допускают при $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ существование относительного равновесия

$$\omega_1 = \omega_2 - \omega_0 = \omega_3 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1 - \sigma_3 = 0, \quad \beta_1 = 1 - \beta_2 = \beta_3 = 0, \tag{1.1}$$

а также (при любых u_1, u_2, u_3) тривиальные геометрические интегралы

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 1 = 0 \tag{1.2}$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - 1 = 0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_1\beta_1 + \sigma_2\beta_2 + \sigma_3\beta_3 = 0. \tag{1.4}$$

Введем новые обозначения для постоянных

$$\begin{aligned} e_1 &= (G_2 - G_3) G_1^{-1} & \lambda_1 &= k_0 G_1^{-1} + e_1\omega_0 \\ e_2 &= (G_3 - G_1) G_2^{-1} & \lambda_3 &= -k_0 G_3^{-1} + e_3\omega_0 \\ e_3 &= (G_1 - G_2) G_3^{-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

и управлений

$$v_1 = u_1 G_1^{-1}, \qquad v_2 = u_2 G_2^{-1}, \qquad v_3 = u_3 G_3^{-1},$$

после чего запишем уравнения для возмущения относительного равновесия, сохраняя для возмущения $x_1 = x - x_0$ рассматриваемого частного решения (1.1) уравнений (1.0) прежние обозначения.

Уравнения возмущений

$$\begin{aligned} d\omega_1/dt &= \lambda_1\omega_3 - \nu^2 e_1\sigma_2 + e_1(\omega_2\omega_3 - \nu^2\sigma_2\sigma_3) + v_1 \\ d\omega_2/dt &= -\nu^2 e_2\sigma_1 + e_2(\omega_1\omega_3 - \nu^2\sigma_1\sigma_3) + v_2 \\ d\omega_3/dt &= \lambda_3\omega_1 + e_3(\omega_1\omega_2 - \nu^2\sigma_1\sigma_2) + v_3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$
\begin{aligned}
&d\sigma_1/dt = -\omega_2 + \omega_0\beta_2 + (\omega_3 - \omega_0\beta_3)\sigma_2 - (\omega_2 - \omega_0\beta_2)\sigma_3\\
&d\sigma_2/dt = \omega_1 - \omega_0\beta_1 + (\omega_1 - \omega_0\beta_1)\sigma_3 - (\omega_3 - \omega_0\beta_3)\sigma_1\\
&d\sigma_3/dt = (\omega_2 - \omega_0\beta_2)\sigma_1 - (\omega_1 - \omega_0\beta_1)\sigma_2\\
&d\beta_1/dt = \omega_3 - \omega_0\beta_3 + \omega_3\beta_2 - \omega_2\beta_3\\
&d\beta_2/dt = \omega_1\beta_3 - \omega_3\beta_1\\
&d\beta_3/dt = -\omega_1 + \omega_0\beta_1 + \omega_2\beta_1 - \omega_1\beta_2
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

имеют соответствующие выражениям (1.2), (1.3), (1.4) интегралы

$$
\begin{aligned}
&I_1 = 2\sigma_3 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 0\\
&I_2 = 2\beta_2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0\\
&I_3 = \sigma_2 + \beta_3 + \sigma_1\beta_1 + \sigma_2\beta_2 + \sigma_3\beta_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Рассмотрим критерий оптимальности — качество переходного процесса регулирования, долженствующего осуществить асимптотическую стабилизацию решения (1.1) для малых возмущений в виде минимума функционала $\mathcal{J}$, равного интегралу

$$\int_0^\infty [W_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \sigma_1, \sigma_2, \beta_1) + \sum_{i=1}^3 \gamma_i v_i^2 + W_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \sigma_1, \sigma_2, \beta_1)]\, dt, \tag{1.8}$$

в котором однородная квадратичная форма W_2 представляет собой результат исключения переменных $\sigma_3, \beta_2, \beta_3$ с помощью рядов по целым степеням переменных $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1$, соответствующих интегралам (1.7), а постоянные $\gamma_i > 0$. Для малых возмущений такое «понижение порядка» не уменьшает общности рассмотрения относительно случая, когда форма $W_2 = W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ квадратична и однородна по отмеченным переменным. Для малых возмущений форма W_3 есть $o(W_2)$; явное выражение для форм W_2 и W_3 следует в дальнейшем. Сменим для единообразия обозначения $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \sigma_1, \sigma_2, \beta_1$ на $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ и подставим в соответствующие правые части f_i уравнений (1.6) значения величин $\sigma_3, \beta_2, \beta_3$ из интегралов (1.7) в виде рядов от переменных x_4, x_5, x_6. Тогда «укороченная» система, эквивалентная системе уравнений (1.6) при интегралах (1.7), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&dx_1/dt = \lambda_1 x_3 - \nu^2 e_1 x_5 + \varphi_1(x) + v_1\\
&dx_2/dt = -\nu^2 e_2 x_4 + \varphi_2(x) + v_2\\
&dx_3/dt = \lambda_3 x_1 + \varphi_3(x) + v_3\\
&dx_4/dt = -x_2 + \varphi_4(x)\\
&dx_5/dt = x_1 - \omega_0 x_6 + \varphi_5(x)\\
&dx_6/dt = x_3 + \omega_0 x_5 + \varphi_6(x).
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Известно, что производящая функция Беллмана $\Psi(x, t)$ равна минимуму функционала

$$\int_t^\infty [W_2(x) + \sum_{i=1}^3 \gamma_i v_i^2 + W_3(x)]\, dt$$

по управлениям v_i $(i=\overline{1,3})$ и должна удовлетворять на оптимальных v_i^0 уравнению

$$[\partial\Psi/\partial t+\sum_{j=1}^{6}f_j(x)\,(\partial\Psi/\partial x_j)+W_2(x)+\sum_{i=1}^{3}\gamma_i v_i^2+W_3(x)]_{v_i^0}=\min_{v_i}=0, \tag{1.10}$$

а также условию

$$\Psi[x(\infty),\infty]=0. \tag{1.11}$$

Если окажется, что функция Ψ удовлетворяет условиям (1.10) и (1.11), не зависит явно от времени и является положительно определенной функцией x, допускающей бесконечный малый высший предел в точке $x=0$, причем $\operatorname{Sup}[\Psi,\ \|x\|\leqslant R_0]<\inf[\Psi,\ \|x\|=R]$, где область начальных возмущений $\|x_0\|\leqslant R_0<R$ (область определения уравнения (1.9)), то при положительно определенной относительно всех x сумме $W=W_2+\sum_{i=1}^{3}\gamma_i v_i^{0\,2}$ движение $x=0$ окажется асимптотически устойчивым в области достаточно малых начальных возмущений $\|x\|<R_0$ и доставит минимум интегралу (1.8).

2. Рассмотрим с этой целью обратную задачу. Введем положительно определенную однородную симметричную квадратичную форму $\Psi=q_{ij}x^i x^j$, которая соответствует перечисленным требованиям, а также установим выражения для оптимальных управлений v_i^0 и условия для форм $W+W_3$. Из (1.10) для определения v_i^0 имеем:

$$v_i^0=-(2\gamma_i)^{-1}(\partial\Psi/\partial x_i)\qquad (i=\overline{1,3}), \tag{2.1}$$

между тем как формы W_3 и W определяются формулами

$$W_3=-\sum_{i=1}^{6}\varphi_i(\partial\Psi/\partial x_i) \tag{2.2}$$

$$W=g_\sigma(\partial\Psi/\partial x_\sigma)^2+(\partial\Psi/\partial x_j)\,c_{jk}x_k\qquad (\sigma=\overline{1,3};\quad k,j=\overline{1,6}). \tag{2.3}$$

Начиная с выражения (2.3), повторение индекса означает соответствующее суммирование, а новые постоянные равны:

$$g_k=0{,}5\,\gamma_k^{-1}$$

$$c_{jk}=\left\|\begin{matrix}0, & 0, & -\lambda_1, & 0, & \nu^2e_1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \nu^2e_2, & 0, & 0\\ -\lambda_3, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0\\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \omega_0,\\ 0, & 0, & -1, & 0, & -\omega_0, & 0\end{matrix}\right\|. \tag{2.4}$$

Нетрудно усмотреть, что преобразование Лежандра $y_i=\partial\Psi/\partial x_i$ переносит свойство положительной определенности формы Ψ на симметризованную форму $H(y)=y_i x_i(y)-\Psi(y)$ и придает W согласно равенству (2.4) и свойству преобразования следующий вид:

$$W=g_\sigma \overset{2}{y^\sigma}+2c_{ik}h_{kj}y^i y^j \tag{2.5}$$

$$H=h_{ij}y^i y^j. \tag{2.6}$$

Образуем симметричную матрицу B, соответствующую квадратичной форме (2.5), определив ее элементы формулами

$$b_{ij}=g_{ij}+c_{ik}h_{kj}+h_{im}c'_{mj} \qquad (c'_{mj}=c_{jm}), \tag{2.7}$$

где матрица g_{ij} задана таблицей

$$G=\left\|\begin{matrix} g_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & & & . \\ . & 0 & g_3 & 0 & . & . \\ . & & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{2.8}$$

Поставленная задача сведена к вопросу существования совместной положительной определенности форм H и W, элементы матриц которых связаны равенствами (2.7). Критерий Сильвестра для матриц h_{ij} и b_{ij} выделяет в рассматриваемом случае соответствующие достаточные условия в виде строгих неравенств

$$\begin{vmatrix} h_{11} & . & . & . & h_{1i} \\ h_{i1} & . & . & . & h_{ii} \end{vmatrix}>0 \tag{2.9}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1i} \\ b_{i1} & . & . & . & b_{ii} \end{vmatrix}>0, \tag{2.10}$$

из которых вторая система определяется одновременно с выбором матриц G, H и параметров S. Положительно определенные формы (2.5) и (2.6) могут быть [4] приведены невырожденным преобразованием $y=Tz$ к каноническому виду $B=T'\Lambda T$, $H=T'T$, $\Lambda_{ik}=\lambda_{ij}\delta_{jk}$, $\lambda_{ij}=0$, $i\neq j$, $\lambda_{ii}=\lambda_i$. Величины λ_i, которые в данном случае должны быть положительными, суть корни уравнения $|B-\lambda H|=0$; столбцы матрицы $T-u^i$ удовлетворяют равенствам $H^{-1}Bu^i=\lambda_i u^i$ $(i=\overline{1,n})$. В. Вольтерра [6] приводит формулы, выражающие t_{ij} через радикалы от миноров матрицы $\|B-\lambda_i H\|$, определитель $|\|H\||$ и значения различных корней λ_i. Ввиду сложности выражений, описывающих условия положительной определенности форм, которым должна удовлетворять матрица $\|H\|$ согласно этим формулам, исследование неравенств (2.9) и (2.10) возможно проводить для конкретных численных значений b_{ij}, указанных по функционалу критерия с учетом преобразования Лежандра, либо ограничить проводимые подсчеты некоторыми частными случаями.

В этой связи обратимся к условиям, при выполнении которых оператор, соответствующий матрице $\|B-\overset{2}{\mu_0}E\|$, является положительным, где $\mu_0\neq 0$. (Случай $\mu_0=0$ определяет простую, а не асимптотическую устойчивость.) Используя свойства репера из собственных векторов, можно показать, что квадратичная форма $([B-\overset{2}{\mu_0}E]\,y_1 y)$ приводится ортогональным преобразованием R к каноническому виду одновременно с формой (Hy, y) лишь в случае перестановочности операторов $B - \mu_0^2 E$ и H. Пользуясь тем обстоятельством [5], что матрица $T^{-1}ZT$, подобная Z, перестановочна с Y, если $ZY = YZ$, получим следующие условия коммутативности операторов $B - \mu_0^2\, E$ и $H \equiv A$:

$$MA = AM$$

$$L(AC' + CA) = (AC' + CA)L, \tag{2.11}$$

где $M = R^{-1}(AC' + CA + G - \mu_0^2 E)R$, $L = R^{-1}AR$ и имеют структуру

$$\begin{aligned} M &= \mu_1 E_1 \dotplus \mu_2 E_2 \dotplus \ldots \dotplus \mu_m E_m \\ L &= \lambda_1 E_1 \dotplus \lambda_2 E_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_l E_l. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Согласно равенствам (2.11) и (2.12) для матриц A и $AC' + CA$ имеем разложения

$$\begin{aligned} A &= D_1 \dotplus D_2 \dotplus \ldots \dotplus D_m \\ AC' + CA &= F_1 \dotplus F_2 \dotplus F_3 \dotplus \ldots \dotplus F_l \end{aligned} \tag{2.13}$$

с квадратными матрицами D_k, F_s $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant s \leqslant l,\ \ m \leqslant l)$, расположенными по диагонали. Из равенств (2.13) следует, что справедливы уравнения

$$|A - \lambda E| = \prod_{i=1}^{m} |D_i - \lambda E_i| = 0 \tag{2.14}$$

$$|B - \varrho E| = \prod_{j=1}^{l} |F_j + G_j - \varrho E_j| = 0, \tag{2.15}$$

в которых матрица G предполагается разложенной на сумму $G_1 \dotplus \ldots \dotplus G_l$, а корни $\varrho_i = \mu_i + \mu_0^2$, причем должны выполняться неравенства $\lambda_i > 0$, $\mu_i \geqslant 0$.

Произведем перебор различных возможностей.

1) Пусть $m = 6 = l$, что сообщает матрице A согласно равенствам (2.12), (2.13), (2.14) диагональный вид L; между тем, для выполнения второго условия (2.13), имея в виду элемент матрицы F с индексом 36, необходимо равенство $f^1_{36} = f^1_{63} = 0$. Здесь он равен корню λ_3 с обратным знаком, и вариант 1) отпадает.

2) При $m = 5$ уравнение (2.15) имеет один двукратный корень ϱ_k, а матрица M обладает структурой $(1 \leqslant k \leqslant 5)$ $\varrho_1 E_1 \dotplus \ldots \dotplus \varrho_k E_k \dotplus \ldots \dotplus \varrho_5 E_5$, согласно которой матрица A представима в виде $\lambda_1 E_1 \dotplus \ldots \dotplus D_k \dotplus \ldots \dotplus \lambda_5 E_5$. Ввиду положительности корней λ_i требование $f^{(2)}_{36} = f^{(2)}_{63} = 0$ заставляет отбросить вариант 2) как противоречивый.

3) При $m = 4$ уравнение (2.15) имеет либо два различных двукратных, либо один трехкратный корень; первый случай отпадает аналогично предыдущему, второй же ввиду положительности λ_i, второй строки условий (2.11), а также невырожденности формы W невозможен.

4) В случае $m = 3$ уравнение (2.15) обладает либо а) одним четырехкратным корнем, либо б) одним трехкратным и одним двукратным

корнями, либо, наконец, в) тремя двукратными корнями. Аналогично вариантам 2) и 3) отпадают подслучаи в) и б), так что весь случай 4) сводится к подслучаю а), которому, согласно формам (2.12), (2.13), соответствуют три возможных типа матрицы $A^{(i)}$ $(i=\overline{1,3})$, именно:

$$A^{(1)}=\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & a & b & c & d & .\\ . & b & e & f & g & .\\ . & c & f & h & k & .\\ 0 & d & g & k & l & 0\\ 0 & . & . & . & . & \lambda_6\end{matrix}\right\|,\quad A^{(2)}=\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & .\\ . & & a & b & c & d\\ . & & b & e & f & g\\ . & & c & f & h & k\\ 0 & 0 & d & g & k & l\end{matrix}\right\|,\quad A^{(3)}=\left\|\begin{matrix}a & b & c & d & 0 & 0\\ b & e & f & g & . & .\\ c & f & h & k & . & .\\ d & g & k & l & . & .\\ 0 & . & . & . & \lambda_5 & .\\ 0 & . & . & . & . & \lambda_6\end{matrix}\right\|.$$

Аналогично варианту 1) в матрице $A^{(3)}$ элемент $h=0$, что ввиду рассуждений 3) приводит к необходимости оставить это представление матрицы A.

Применяя к матрице $\|N_{ij}\|=CA+AC'+G-\mu_0^2E$ критерий Сильвестра, начиная с элемента n_{66} приходим к противоречию с требованием положительности и невырожденности формы W. Так же и для матрицы A_2, исходя из критерия Сильвестра для первых четырех диагональных миноров, можно показать, что требование положительности и невырожденности формы W несовместимо с условиями (2.11), (2.14) и (2.15). Иными словами, случай $m=3$ не имеет места.

5) Если $m=2$, то уравнение (2.15) имеет один корень с кратностью пять, а матрица A, соответствующая этому варианту, согласно первой строке равенств (2.11) представима таблицами

$$\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 \;.\;.\;.\; 0\\ 0 & \\ \vdots & \|a^1_{\tau\gamma}\|\\ 0 & \end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}\|a_{\tau\gamma}\| & 0\\ & \vdots\\ 0\;.\;.\;.\;. & \lambda_6\end{matrix}\right\|\qquad (\tau,\gamma=\overline{1,5}).$$

Для выполнения второй строки равенств (2.13) потребуется обратить в нуль пять элементов b_{1j} $(2\leqslant j\leqslant 6)$, а также обеспечить существование пятикратного корня ϱ_i, большего или равного μ_0^2, уравнения (2.15), что приводит, вообще говоря, к четырем дополнительным условиям на параметры $S, g_i, a_{\tau\gamma}, \mu_0^2$; эти девять соотношений на перечисленные параметры необходимо сопоставить с неравенствами Сильвестра для матрицы $a^1_{\tau\gamma}$ и $\lambda_1>0$ (или же $a_{\tau\gamma}$ и $\lambda_6>0$), а также со структурными равенствами нулю элементов, соответствующими второй строке условий (2.13) и (2.12), число которых существенно зависит от кратности корней уравнения (2.14).

6) Аналогичным образом можно рассмотреть случай $m=1$, когда все корни уравнения (2.15) равны между собой. Варианты 5) и 6) исчерпывают все потенциальные возможности случая совпадения реперов из собственных векторов операторов H и $B-\mu_0^2E$. Случай $m\geqslant l$ ввиду произвола E_k опустим.

Возвращаясь к общему случаю некоммутативных операторов H и B, рассмотрим в качестве примера матрицы $\|h_{ij}\|$ следующую:

$$\left\|\begin{matrix}a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & l & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & m\\ 0 & l & 0 & a_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & n\\ 0 & 0 & m & 0 & n & a_6\end{matrix}\right\|, \qquad (2.16)$$

для которой условия Сильвестра суть:

$$a_i > 0 \quad (i = \overline{1,6}), \; a_2 a_4 - l^2 > 0, \quad a_3 a_5 a_6 - n^2 a_3 - m^2 a_5 > 0. \tag{2.17}$$

Матрица B, соответствующая выражению (2.16) и формулам (2.7), определяется таблицей

$$\left\| \begin{matrix} g_1 & 0 & \lambda_0 & 0 & e_{51} & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 0 & g_3 & 0 & m\omega_0 & -a_3 \\ 0 & e_{24} & 0 & 2l & 0 & 0 \\ e_{51} & 0 & m\omega_0 & 0 & 2n\omega_0 & \eta \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 & \eta & 2\mu \end{matrix} \right\|, \tag{2.18}$$

в которой использованы обозначения

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = -\lambda_1 a_3 - \lambda_3 a_1 && e_{51} = \nu^2 e_1 a_5 - a_1 \\ &\sigma_2 = g_2 + 2\nu^2 e_2 l && \eta = \omega_0 (a_6 - a_5) \\ &e_{24} = \nu^2 e_2 a_4 + a_2 && \mu = -m - \omega_0 n. \end{aligned}$$

Условия положительности первых четырех диагональных миноров Сильвестра d_i определяют следующие простые неравенства на постоянные g, элементы a и параметры S:

$$\begin{aligned} &d_1 = g_1 > 0 \\ &d_2 = g_1 \sigma_2 > 0, \quad \sigma_2 > 0 \\ &d_3 = \sigma_2 (g_1 g_3 - \lambda_0^2) > 0, \quad g_1 g_3 - \lambda_0^2 > 0 \\ &d_4 = 2l d_3 - e_{24}^2 \lambda_0^2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Те же условия для миноров d_5 и d_6 имеют сложные выражения

$$d_5 = 2n\,\omega_0 d_4 + (2l\sigma_2 - e_{24}^2)[(2\lambda_0 e_{51} - g_1 m\,\omega_0) m\,\omega_0 - g_3 e_{51}^2] > 0 \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} d_6 = 2\mu\, d_5 + (2l\sigma_2 - e_{24}^2)[(\lambda_0^2 - g_1 g_3)\eta^2 + \\ + 2g_1 m\,\omega_0 a_3 \eta + (e_{51} - 2n\,\omega_0 g_1) a_3^2]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

При выполнении неравенства $g_2 > 2\nu^2 l (G_1 - G_3) G_2^{-1}$ надлежащим выбором достаточно больших постоянных g_1, g_3 можно добиться соблюдения неравенства (2.19). Сомножитель $2l\,\sigma_2 - e_{24}^2$ в выражениях (2.20) и (2.21) можно считать неположительным, если справедливы строки

$$\begin{aligned} &1)\ G_3 < G_1, \quad g_1 g_3 > 2\lambda_0^2, \; g_2 > 2\,|G_3 - G_1|\,|e_{24}|, \; \xi_2 - \xi_1 \leqslant 2l < g_2 \nu^{-2} |e_2|^{-1} \\ &2)\ G_3 = G_1, \quad g_1 g_3 > 2\lambda_0^2, \quad e_{24}^2 \lambda_0^2 (g_1 g_3 - \lambda_0^2)^{-1} g_2^{-1} < 2l < e_{24}^2 \lambda_0^2 g_2^{-1} \\ &3)\ G_3 > G_1, \quad g_1 g_3 > 2\lambda_0^2, \quad \xi_2' - \xi_1 < 2l \leqslant \xi_2 - \xi_1, \end{aligned} \tag{2.22}$$

в которых введены обозначения

$$\begin{aligned} &\xi_2^2 = e_{24}^2 \nu^{-2} e_2^{-1} + g_2^2 4^{-1} \nu^{-4} e_2^{-2} && \xi_2'^2 = e_{24}^2 \lambda_0^2 d_0^{-1} \nu^{-2} e_2^{-1} + g_2^2 4^{-1} \nu^{-4} e_2^{-2} \\ &\xi_1 = 0{,}5 g_2 \nu^{-2} e_2^{-1} && d_0 = g_1 g_3 - \lambda_0^2. \end{aligned}$$

Если подчинить выбор постоянных одной из строк 1)—3) неравенств (2.22), ограничив величины l, g_1, g_2 указанными пределами, то для положительности миноров d_5 и d_6 достаточно соблюдения одной из групп условий

$$2l\sigma_2 - e_{24}^2 \neq 0, \qquad n > 0, \qquad g_3 e_{51}^2 + m\omega_0(g_1 m\omega_0 - 2\lambda e_{51}) > 0$$
$$\mu > 0, \qquad (g_1 g_3 - \lambda_0^2)\eta^2 - 2g_1 m\omega_0 a_3\eta + (2n\omega_0 g_1 - e_{51})a_3^2 > 0 \tag{2.23}$$

или

$$G_3 \neq G_1, \quad 2l\sigma_2 - e_{24}^2 = 0, \quad n > 0, \quad \mu > 0, \tag{2.24}$$

каждую из которых необходимо дополнить неравенствами (2.17). Предполагая постоянные m, λ_0, a_3 малыми по модулю относительно g_1 и g_3, можно утверждать, что система величин, удовлетворяющая условиям (2.17), (2.19), (2.22) и одной из групп (2.23) или (2.24) обеспечивает положительную определенность форм H и W. Прибегая к зависимости $x_i = \partial H/\partial y_i$, можно получить выражение функций $\Psi = y_i(\partial H/\partial y_i) - H$, W и W_2 от «старых» аргументов x_i. Поправка к квадратичной составляющей функции критерия W_2 определяется равенством (2.2), а оптимальные управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость относительного равновесия спутника, согласно формулам (2.1) и (1.5), получим в виде вектора $\overline{U}(\overline{\Omega}, \overline{\Lambda})$, где $\overline{\Lambda} = \{\sigma_1, \sigma_2, \beta_1\}$.

3. Представим себе теперь, что угловое положение спутника и его скорости вращения относительно центра масс регулируются посредством выброса масс и вращения маховиков, оси которых фиксированы в теле S. Первое создает управляющий момент $\overline{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$, второе для маховиков с равными моментами инерции ε_0 подчиняется, согласно [2, 3], уравнениям относительного движения

$$\varepsilon_0 \frac{d\overline{\Omega}}{dt} = -d\overline{k}/dt - \overline{F}(\overline{\Omega}) + \overline{W}, \tag{3.1}$$

в которых наряду со старыми приняты следующие новые обозначения: управляющий момент $\overline{W}$, развиваемый электродвигателями, имеет проекции w_1, w_2, w_3; момент сил вязкого трения в подшипниках $-\overline{F}(\overline{\Omega})$ соответственно $-\nu_1 k_1$, $-\nu_2 k_2$, $-\nu_3 k_3$ (ν_i — постоянные); $\overline{k}$ — момент относительного количества движения маховиков, здесь понимается как приращение вектора с проекциями 0, k_0, 0. Теперь из уравнений (1.0) и (3.1) получим полную систему уравнений движения совокупности S:

$$\begin{gathered}
d\overline{K}/dt + [\overline{\Omega}, \overline{K}] = \nu^2[\operatorname{grad}_\sigma \Phi, \overline{\sigma}] + \overline{U}(\overline{\Omega}, \overline{\Lambda}) \\
d\overline{\sigma}/dt = [\overline{\sigma}, \overline{\Omega} - \omega_0\overline{\beta}] \\
d\overline{\beta}/dt = [\overline{\beta}, \overline{\Omega}] \\
dk_1/dt = -\nu_1 k_1 + \varepsilon_1[-k_0\omega_3 - u_1 + (G_3 - G_2)(\omega_2\omega_3 - \nu^2\sigma_2\sigma_3)] + w_1 \\
dk_2/dt = -\nu_2 k_2 + \varepsilon_2[-u_2 + (G_1 - G_3)(\omega_1\omega_2 - \nu^2\sigma_1\sigma_3)] + w_2 \\
dk_3/dt = -\nu_3 k_3 + \varepsilon_3[-k_0\omega_1 - u_3 + (G_2 - G_1)(\omega_1\omega_2 - \nu^2\sigma_1\sigma_2)] + w_3,
\end{gathered} \tag{3.2}$$

в которой переменные u_i — известные линейные функции величин ω_1, ω_2, ω_3, σ_1, σ_2, β_1 согласно равенствам (2.1) и (1.5), постоянные ε_i равны $\varepsilon_0 G_i^{-1}$. Из векторной группы уравнений (3.2) после интегрирования можно определить все переменные как функции времени и начальных уклонений от относительного равновесия; подставив затем соответствующие выражения в скалярную часть уравнений (3.2), получим систему уравнений на k_i, содержащую время, по отношению к которой можно вновь поставить задачу оптимальной стабилизации тривиального решения по переменным k_i при новом критерии качества переходного процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В., Искусств. спутники Земли, вып. 16, 68 (1963); вып. 3, 13 (1959).
2. Летова Т. А., ПММ, **29**, вып. 6, 1116—1121 (1965).
3. Крементуло В. В., ПММ, **30**, вып. 1, 42 (1966).
4. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., 1952, с. 252—256.
5. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М., 1956, с. 144—147.
6. Volterra V., Acta math., **22**, 201—358 (1898—1899).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/IV 1967

I. KEIS

STATSIONAARSE SPUTNIKU SUHTELISE TASAKAALU OPTIMAALSEST ASÜMPTOOTILISEST STABILISEERIMISEST. I

Statsionaarse sputniku suhtelise tasakaalu optimaalse stabiliseerimise ülesande lahendamiseks on Ljapunovi-Bellmani meetodil välja töötatud piisavad tingimused. Ühtlasi näidatakse võimalust sputniku täielikuks stabiliseerimiseks uue kvaliteedikriteeriumi valikuga.

I. KEIS

ON THE OPTIMAL STABILIZATION OF THE RELATIVE EQUILIBRIUM OF A STATIONARY SATELLITE. I

The paper presents some sufficient conditions, based on Liapunoff-Bellman's method, for an asymptotic stabilization of the relative equilibrium of a stationary satellite. The possibility of obtaining complete stabilization is suggested in case if a new optimization criterium is put forward.