EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.03

*Э. ТИЙТ*

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ В ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

## 1. Понятие простой структуры

Пусть задан случайный вектор $X=(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathbf{M}(X_i)=0$, $\mathbf{D}(X_i)=1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Целью факторного анализа является представление вектора $X$ в виде суммы

$$X=AF+U, \tag{1}$$

где факторный вектор $F=(F_1, \ldots, F_m)$ и вектор особенностей $U=(U_1, \ldots, U_n)$ являются случайными, а факторная матрица[1] $A=(a_{ij})$ детерминирована; размерность $m$ вектора $F$ минимальна и векторы $F$ и $U$ удовлетворяют условиям

$$\mathbf{M}(F_j U_i)=0, \quad \mathbf{M}(U_i U_k)=0 \quad (i \neq k). \tag{2}$$

Неизвестная факторная матрица $A$ определяется из уравнения

$$\operatorname{cov} X=R=A(\operatorname{cov} F)A'+\operatorname{cov} U, \tag{3}$$

вытекающего[2] из соотношений (1) и (2) (здесь $R$ — корреляционная матрица случайного вектора $X$).

В частном случае, когда

$$\operatorname{cov} F=E, \tag{4}$$

уравнение (3) приобретает вид

$$R-\operatorname{cov} U=AA'. \tag{5}$$

Если нам известно решение[3] $A=A_0$ уравнения (5), то определяя матрицу $T$ так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{cov} F=TT',$$

(здесь не предполагается выполнение условия (4)), получим и решение $A=A_1$ уравнения (3) в виде

$$A_1=A_0T^{-1}. \tag{6}$$

---

[1] В дальнейшем всегда $i, k=1, 2, \ldots, n$; $j, l=1, \ldots, m$.
[2] Символом $A'$ обозначается матрица, транспонированная к матрице $A$.
[3] О методах нахождения факторной матрицы $A$ см., напр., [1, 3].

Здесь существование матриц $T$ и $T^{-1}$ вытекает из положительной определенности ковариационной матрицы и условия минимальности ранга матрицы $\operatorname{cov} F$.

Но, как известно, полученные решения $A_0$ и $A_1$ не являются единственными для уравнений (5) и (3). Действительно, пусть матрица $K$ удовлетворяет условию

$$KK' = E. \tag{7}$$

Тогда и матрица

$$A_2 = A_0KT^{-1} = A_0(TK')^{-1}$$

является решением уравнения (3), а матрица

$$A_3 = A_0K$$

— решением уравнения (5).

В практических применениях желательно иметь добавочные условия, которые определяют матрицу $A$ однозначно. Доказано [2, 3], что из уравнения (5) матрица $A$ определяется однозначно до поворота (и погрешности). Таким образом, для однозначного определения матрицы $A$ необходимо и достаточно определить однозначно матрицу преобразования $T^{-1}$ в формуле (6).

В практике самой целесообразной оказалась такая факторная матрица

$$L = A_0T^{-1}, \tag{8}$$

в которой число элементов, равняющихся нулю (или достаточно близких к нулю), максимально. Такая матрица $L$ называется простой структурой (ПС) факторной матрицы $A$.

Часто делается еще предположение, что матрица преобразования $K$ удовлетворяет условию (7). В таком случае факторы ортогональны, т. е. выполняется условие (4). Матрица

$$Q = A_0K^{-1}, \tag{9}$$

в которой число элементов, равных нулю (или достаточно близких к нулю), максимально в классе всех ортогональных матриц преобразования $K$, называется ортогональной простой структурой ($\perp$ПС) факторной матрицы $A$.

Существуют многие эмпирические, а также и аналитические методы для нахождения простой структуры (см., напр., [3]), но большинство из последних не уделяет внимания статистическим особенностям рассматриваемой задачи.

В настоящем сообщении предлагается аналитический метод для определения простой структуры, основанный на статистических рассуждениях. Данный метод пригоден для нахождения как ортогональной простой структуры $Q$, так и общей (неортогональной) простой структуры $L$. Рассматриваются и признаки, позволяющие выяснить вопрос, является ли для описания данной матрицы $A$ более пригодной ПС $L$ или $\perp$ПС $Q$, или, может быть, у рассматриваемой матрицы $A$ вообще не существует естественной простой структуры. Наконец, указывается и на возможность (для некоторых матриц $A$) сокращения числа факторов $m$ при помощи ПС. Данный алгорифм пригоден и для практических вычислений на ЭВМ, так как имеет циклический характер, притом каждый цикл состоит из небольшого числа арифметических и логических операций.

## 2. Определение простой структуры на основании данной выборки

Пусть задана выборка объема $N$ из значений случайного вектора $X$; пусть задан и некоторый доверительный уровень $1-\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Предположим, что нам известна некоторая факторная матрица $A_0=(a_{ij}^0)$, а также матрицы [4]

$$B(\alpha, N)=(b_{ij}) \quad \text{и} \quad C(\alpha, N)=(c_{ij}) \tag{10}$$

нижних и верхних доверительных границ [5] всех факторных весов $a_{ij}^0$. Факторный вес $a_{ij}^0$ считается статистически равным нулю, если имеет место неравенство

$$b_{ij} c_{ij} \leqslant 0. \tag{11}$$

Обозначим этот факт символом $a_{ij}^0 \sim 0$.

На основании данной выборки и данного доверительного уровня естественно определить *простую структуру $L(\alpha, N)$ как матрицу $L$, в которой число $r$ элементов, статистически равных нулю, максимально.* В общем таких матриц бесконечное множество, которое мы обозначаем символом $\mathscr{H}(\alpha, N)$.

Если множество $\mathscr{H}$ выпуклое, т. е. при $A_1=(a_{ij}^1) \in \mathscr{H}$, $A_2=(a_{ij}^2) \in \mathscr{H}$ и

$$A_3=(ta_{ij}^1+(1-t)\,a_{ij}^2) \in \mathscr{H} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

то мы скажем, что у матрицы $A$ существует о п т и м а л ь н а я п р о с т а я с т р у к т у р а (ОПС) $L^*$ (см. рис. 1), и определим ее соотношением

$$L^*=\mathbf{M}(A : A \in \mathscr{H}), \tag{12}$$

где математическое ожидание найдется по произвольной вероятностной мере [6] на множестве $\mathscr{H}$.

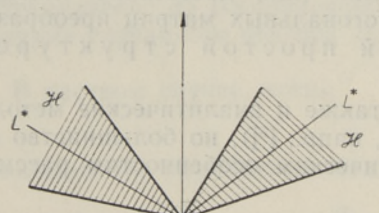


Рис. 1.

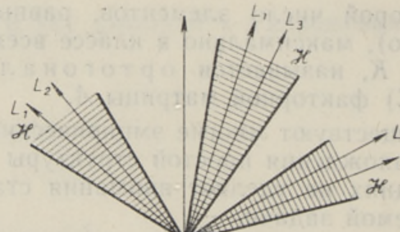


Рис. 2.

Если множество $\mathscr{H}$ не является выпуклым, то у матрицы $A$ не существует оптимальной простой структуры (см. рис. 2). В таком случае множество $\mathscr{H}$ является конечной суммой выпуклых подмножеств

$$\mathscr{H}=\bigcup_{q=1}^{p} \mathscr{H}_q, \qquad p \leqslant n\,\frac{m(m-1)}{2}$$

---

[4] В дальнейшем считаем $\alpha$ и $N$ фиксированными и не будем их отмечать.

[5] Оценки погрешностей факторной матрицы рассматриваются в работах [4–6, 8].

[6] В качестве этой меры всегда можно выбрать, например, равномерное распределение; в таком случае $\mathbf{M}(A)$ является арифметическим средним границ множества $\mathscr{H}$.

и для матрицы $A$ можно определить $p$ разных, математически равнообоснованных простых структур, применяя формулу (12) в любом множестве $\mathcal{H}_q$.

### 3. Определение ортогональной простой структуры на основании данной выборки

При заданной выборке (объема $N$), заданном $\alpha$ и известном $A_0$ определим *ортогональную простую структуру* $Q(\alpha, N)$ *как матрицу* $Q$ (см. формулу (9)), *в которой число* $v$ *элементов, статистически равных нулю, максимально в классе ортогональных матриц поворота* $K$ (см. формулу (7)). Множество всех таких матриц обозначаем символом $\mathcal{J}$.

Если множество $\mathcal{J}$ выпуклое, то существует оптимальная ортогональная простая структура (О⊥ПС) $Q^*$, которая определяется из соотношения

$$Q^* = \mathbf{M}(A : A \in \mathcal{J}), \tag{13}$$

где математическое ожидание найдется по произвольной вероятностной мере на множестве $\mathcal{J}$.

Легко видеть, что $v \leqslant r$. Но особенно интересны случаи, когда $v = r$, так как тогда именно ⊥ПС наилучшим образом представляет данную матрицу $A$. Тогда $\mathcal{J} \in \mathcal{H}$; если притом множество $\mathcal{J}$ выпуклое, то мы называем простую структуру, определенную формулой (13), в п о л н е о п т и м а л ь н о й о р т о г о н а л ь н о й п р о с т о й с т р у к т у р о й (ВО⊥ПС).

Если $v$ и $r$ мало отличаются друг от друга и $Q^*$ существует, то матрица $A$ хорошо характеризуется матрицей $Q^*$ (О⊥ПС). Если $v$ мало по сравнению с $r$, то матрица $A$ не характеризуется хорошо ортогональной простой структурой и для описания $A$ более пригодна ОПС $L^*$ (если она существует).

При всех этих рассуждениях надо иметь в виду и тот факт, что существование ОПС, О⊥ПС и ВО⊥ПС зависит от $N$ и $\alpha$ и, изменяя их (в частности $\alpha$), можно найти ОПС или О⊥ПС даже для таких матриц, у которых они при фиксированном $\alpha$ не существуют.

### 4. Матрица поворота в двумерном случае

Рассмотрим прежде всего случай двух факторов ($m = 2$). Предположим, что нам известна некоторая факторная матрица $A_0 = (a_{ij}^0)$ $(j = 1, 2)$ соответственно с матрицами нижних и верхних доверительных границ $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$. Матрица преобразования $T^{-1} = G$ имеет в таком случае форму

$$G = G(\varphi, \psi) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sin\psi & -\sin\varphi \\ -\cos\psi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\Delta = \sin(\psi - \varphi)$; угол $\varphi$ — полярный угол первой оси после поворота, $\psi$ — полярный угол второй оси после поворота (первая ось соответствует первому столбцу матрицы $A_0$, вторая ось — второму столбцу той же матрицы).

В частном случае, когда матрица $G$ является ортогональной ($T$, а тогда и $G$ удовлетворяет условию (7)),

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

и матрица $G$ приобретает вид

$$V = V(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрицами $B$ и $C$ определяются двумерные доверительные области точек $(\overset{0}{a}_{i1}, \overset{0}{a}_{i2})$. К сожалению, точная форма этих областей нам не известна и мы должны их аппроксимировать некоторыми плоскими фигурами, пригодными для дальнейших рассуждений. Так как почти по всем алгорифмам факторная матрица $A_0$ вычисляется по столбцам (см., напр., [1, 3]), то погрешности столбцов являются зависимыми, притом бо́льшим (по абсолютной величине) погрешностям в первом столбце соответствуют, как правило, и бо́льшие погрешности во втором столбце (и т. д.); корреляции между этими погрешностями неизвестны. Таким образом, нет основания считать доверительные области эллипсоидами (хотя весь дальнейший ход рассуждений сохраняет силу в случае эллипсоидальных доверительных областей, см. [7]; нужно ввести лишь некоторые изменения в вычислительные формулы). Более естественным является приближение доверительных областей прямоугольниками (см. рис. 3), в $m$-мерном случае соответственно $m$-мерными прямогранниками, сторонами которых являются доверительные интервалы факторных весов $\overset{0}{a}_{ij}$.

Пусть нам задана некоторая матрица поворота $G$. Обозначим матрицу $A_0G$ символом $A_1$. Найдем и матрицы доверительных границ $B_1$ и $C_1$ матрицы $A_1$. Для этого определим $(n \times 2)$-матрицы

$$X_1 = (b_{i1}, b_{i2}); \quad X_2 = (b_{i1}, c_{i2}); \quad X_3 = (c_{i1}, b_{i2}); \quad X_4 = (c_{i1}, c_{i2}),$$

и вычислим

$$X_kG = J_k = (y_{ij}^k) \qquad (j = 1, 2;\ k = 1, 2, 3, 4);$$

обозначая

$$\begin{aligned} b_{i1}^1 &= \min_k y_{i1}^k, & b_{i2}^1 &= \min_k y_{i2}^k, \\ c_{i1}^1 &= \max_k y_{i1}^k, & c_{i2}^1 &= \max_k y_{i2}^k, \end{aligned} \tag{17}$$

получим искомые $(n \times 2)$-матрицы $B_1 = (b_{ij}^1)$ и $C_1 = (c_{ij}^1)$.

Оказалось, что вследствие преобразования доверительные множества факторных весов увеличиваются (т. е. получаются доверительные множества, соответствующие $\alpha' < \alpha$), но это в статистике в общем допускается (см. рис. 4).

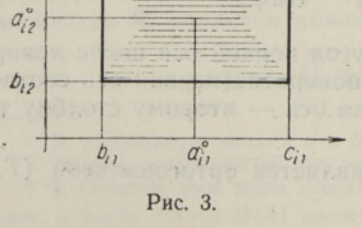

Рис. 3.

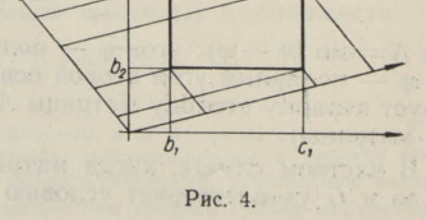

Рис. 4.

Если по каким-нибудь причинам увеличение доверительных областей нежелательно, то можно новые доверительные границы ввести при помощи формул:

$$b^1_{i1} = \mathbf{M}(y : y^1_{i1} \leqslant y \leqslant y^2_{i1}), \qquad c^1_{i1} = \mathbf{M}(y : y^3_{i1} \leqslant y \leqslant y^4_{i1}),$$

$$b^1_{i2} = \mathbf{M}(y : y^1_{i2} \leqslant y \leqslant y^3_{i2}), \qquad c^1_{i2} = \mathbf{M}(y \cdot y^2_{i2} \leqslant y \leqslant y^4_{i2}),$$

где математическое ожидание найдется по вероятностной мере, соответствующей предполагаемому распределению погрешностей факторных весов.

### 5. Нахождение углов поворота в двумерном случае

Для определения ПС $L = (l_{ij})$ в двумерном случае необходимо определить такие углы $\varphi$ и $\psi$, при которых в матрице $L = A_0 G(\varphi, \psi)$ (см. формулы (8) и (14)) максимальное число элементов равняется статистически нулю.

Найдем сейчас для каждой точки $(\overset{0}{a}_{i1}, \overset{0}{a}_{i2})$ такие значения угла $\varphi$, при которых

$$l_{i1} \sim 0.$$

Множество таких углов обозначаем символом $\Phi_i$. Для простоты введем обозначения:

$$\arctan\,(b_{i2}/b_{i1}) = \gamma_{i1}, \qquad \arctan\,(c_{i2}/b_{i1}) = \gamma_{i3},$$
$$(0 \leqslant \gamma_{ij} \leqslant \pi;\ j = 1, 2, 3, 4).$$
$$\arctan\,(b_{i2}/c_{i1}) = \gamma_{i2}, \qquad \arctan\,(c_{i2}/c_{i1}) = \gamma_{i4}$$

1°. Если $b_{i1}c_{i1} > 0$, $b_{i2}c_{i2} > 0$, то (см. рис. 5)

$$\varphi_{i1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 4} \gamma_{ij}, \quad \varphi_{i2} = \max_{1 \leqslant j \leqslant 4} \gamma_{ij}; \qquad \Phi_i = [\varphi_{i1}, \varphi_{i2}].$$

2°. Если $b_{i1}c_{i1} < 0$, $b_{i2}c_{i2} > 0$, то (см. рис. 6)

$$\varphi_{i1} = \min\,(\gamma_{i2}, \gamma_{i3}), \qquad \varphi_{i2} = \max\,(\gamma_{i1}, \gamma_{i4}); \qquad \Phi_i = [\varphi_{i1}, \varphi_{i2}].$$

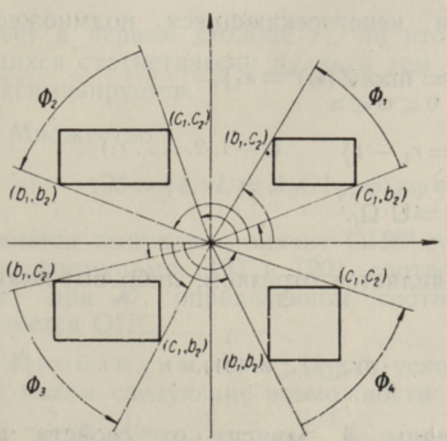


Рис. 5.

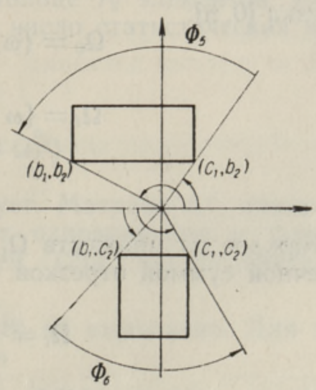


Рис. 6.

3°. Если $b_{i1}c_{i1} > 0$, $b_{i2}c_{i2} < 0$, то (см. рис. 7)

$$\varphi_{i1} = \min(\gamma_{i1}, \gamma_{i4}), \quad \varphi_{i2} = \max(\gamma_{i2}, \gamma_{i3}); \quad \Phi_i = [0, \varphi_{i2}] \cup [\varphi_{i1}, \pi].$$

4°. Если $b_{i1}c_{i1} < 0$, $b_{i2}c_{i2} < 0$, то (см. рис. 8)

$$\Phi_i = [0, \pi].$$

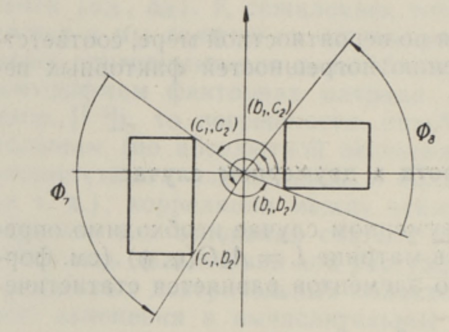


Рис. 7.

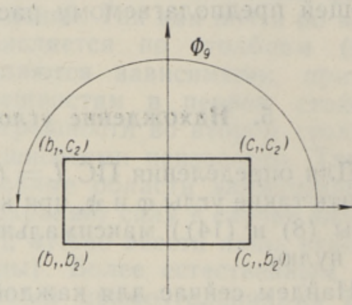


Рис. 8.

Обозначаем характеристическую функцию множества $\Phi_i$ символом $I_i(\omega)$:

$$I_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Phi_i, \\ 0, & \omega \bar{\in} \Phi_i. \end{cases}$$

Тогда неотрицательная ступенчатая функция

$$Z(\omega) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\omega) \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant \pi)$$

показывает для каждого угла $\omega$ число точек $(a_{i1}, a_{i2})$, удовлетворяющих условию

$$l_{i1} \sim 0.$$

При матрице преобразования $G(\omega, \psi)$ (см. формулу (14)) $\psi$ произвольное.

Функцией $Z(\omega)$ определяются непересекающиеся подмножества отрезка $[0, \pi]$:

$$\Omega_0 = \{\omega : Z(\omega) = \max_{0 \leqslant \omega \leqslant \pi} Z(\omega) = r_1\},$$

$$\Omega_t = \{\omega : Z(\omega) = r_1 - t\} \qquad (t = 1, 2, \ldots, r_1)$$

$$[0, \pi] = \bigcup_{t=0}^{r_1} \Omega_t.$$

Каждое из множеств $\Omega_t$ либо является отрезком, либо выражается конечной суммой отрезков

$$\Omega_t = \bigcup_{q=1}^{p_t} \Omega_t^r \qquad (0 < p_t \leqslant n + 1).$$

Существование ОПС у матрицы $A$ зависит от свойств множеств $\Omega_t$.

Теорема.

*Необходимым и достаточным условием для того, чтобы у $(n \times 2)$-матрицы $A$ существовала* ОПС, *является существование такого индекса* $s \geqslant 0$, *что*

$$\sum_{i=0}^{s} p_i = 2, \tag{18}$$

*где* $p_i$ — *число непересекающихся отрезков множества* $\Omega_i$.

Доказательство.

Достаточность. Для выполнения условия (18) имеются две возможности:

a) $\Omega_0 = \Omega_0^1 \cup \Omega_0^2$, т. е. $s = 0$ и $p_0 = 2$;

b) $\Omega_0 = \Omega_0^1$, т. е. $p_0 = 1, p_1 = 0, \ldots, p_{s-1} = 0$, и существует $s \geqslant 1$ такое, что $p_s = 1$, т. е. $\Omega_s = \Omega_s^1$.

Наглядно случай a) значит, что имеются два направления осей (2 угла $\varphi$), которые оба максимизируют число статистических нулей. Случай b) значит, что кроме направления, дающего абсолютный максимум числа статистических нулей, существует еще направление, дающее локальный максимум, который больше остальных локальных максимумов.

Обозначим $r_1 - s = r_2$ и выберем углы поворота следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \mathbf{M}(\varphi : \varphi \in \Omega_0^1), \\ \psi_0 &= \mathbf{M}(\varphi : \varphi \in \Omega_s^{p_s}), \end{aligned} \tag{19}$$

где математическое ожидание найдется по произвольной вероятностной мере на множестве $[0, \pi]$.

Матрица $G(\varphi_0, \psi_0)$ определяется при помощи найденных углов из соотношения (14).

Из определения углов $\varphi_0$ и $\psi_0$ вытекает, что матрица

$$L^* = A_0 G(\varphi_0, \psi_0) \tag{20}$$

имеет в первом столбце $r_1$, во втором столбце $r_2$ элементов, равняющихся статистически нулю, и тем самым число статистических нулей максимизируется.

Множество

$$\mathcal{H} = \{L : L = A_0 G(\varphi, \psi)\,; \varphi \in \Omega_0^1, \psi \in \Omega_s^{p_s}\} \tag{21}$$

является выпуклым, значит ОПС существует. Матрица $L^*$, определенная формулами (19) и (20), соответствует одновременно и формуле (12) при $\mathcal{H}$, определенном соотношением (21), и, следовательно, является ОПС.

Необходимость. Пусть условие (18) не выполнено. Для этого мы имеем следующие возможности:

c) $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^{p_0} \Omega_0^i$, $\quad p_0 > 2$, т. е. имеется более двух направлений, которые дадут абсолютный максимум числа статистических нулей (см. рис. 2). Тогда мы можем найти $p_0$ разных углов $\varphi_i$:

$$\varphi_i = \mathbf{M}(\varphi : \varphi \in \Omega_0^i) \qquad (i = 1, \ldots, p_0)$$

и соответственно определить $\frac{p_0(p_0-1)}{2}$ разных матриц преобразования $G(\varphi_i, \varphi_j)$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, p_0$. Множество

$$\mathcal{H} = \{L : L = A_0 G(\varphi_i, \varphi_j), \varphi_i \in \Omega_0^i, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, p_0\}$$

не является выпуклым, и ОПС не существует.

d) $\Omega_0 = \Omega_0^1$,

$p_1 = \ldots = p_{s-1} = 0$ и существует некоторая $s \geqslant 1$ такая, что

$$\Omega_s = \bigcup_{i=1}^{p_s} \Omega_s^i,$$

т. е. кроме абсолютного максимума имеются больше одного направления, которые дадут следующий по величине максимум числа статистических нулей.

Тогда определим углы поворота следующим образом:

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \mathbf{M}(\varphi : \varphi \in \Omega_0^1), \\ \psi_i = \mathbf{M}(\varphi : \varphi \in \Omega_s^i) \qquad (i = 1, \ldots, p_s) \end{gathered} \tag{22}$$

и получим $p_s$ разных матриц преобразования $G(\varphi_0, \psi_i)$ $(i = 1, \ldots, p_s)$. Множество

$$\mathcal{H} = \{L : L = A_0 G(\varphi_0, \psi_i), \varphi_0 \in \Omega_0^1 \ \psi_i \in \Omega_s^i, \qquad (i = 1, \ldots, p_s)\}$$

не является выпуклым, и ОПС не существует.

e) $\Omega_0 = \Omega_0^1$, $p_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r_1)$, т. е. существует только один максимум. Определяется угол $\varphi_0$ по формуле (22) и матрица $G(\varphi_0, \psi)$, где $\psi$ произвольное.

Так как случаями а)—е) все нетривиальные возможности исчерпаны, то теорема доказана.

## 6. Определение оптимальной ортогональной простой структуры

Для определения О⊥ПС надо рассмотреть только такие пары углов $\varphi$ и $\psi$, которые удовлетворяют условию (15). Для каждого угла $\varphi$ существует пара индексов $t$ и $w$ такая, что

$$\varphi \in \Omega_t, \psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \in \Omega_w. \tag{22'}$$

Сопоставляя каждому углу $\varphi$ сумму $t + w$, получим целозначную функцию. Рассмотрим множество $\mathcal{J}$ таких углов $\varphi$, при которых сумма $t + w$ имеет минимальное значение, которое обозначим буквой $u$:

$$\mathcal{J}=\{\varphi:\varphi\in\Omega_t,\ \varphi+\frac{\pi}{2}\in\Omega_w,\ t+w=\min_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}(t+w)=u\}.$$

Если $\mathcal{J}$ является отрезком, то примем

$$\varphi_0=\mathbf{M}(\varphi:\varphi\in\mathcal{J}) \tag{23}$$

и определим матрицу поворота $V(\varphi_0)$ из формулы (16). В матрице

$$Q^*=A_0V(\varphi_0) \tag{24}$$

$2r_1-u=v$ элементов равняются статистически нулю. Это число является минимумом в классе ортогональных матриц.

Легко доказать, что выпуклость множества $\mathcal{J}$ является необходимым и достаточным условием существования О⊥ПС и что матрица $Q^*$, определенная соотношениями (23) и (24) в таком случае и является О⊥ПС.

Если притом $r=v$, то полученная матрица $Q^*$ является одновременно и ВО⊥ПС.

## 7. Нахождение простой структуры в общем случае

Пусть нам задано $m$-мерное пространство $R^m$ $(m>2)$. Координатными осями определяются $\frac{m(m-1)}{2}$ разных ортогональных 2-мерных плоскостей этого пространства:

$$R_{12},\ R_{13},\ \ldots,\ R_{1m},\ R_{23},\ \ldots,\ R_{2m},\ \ldots,\ R_{m-1,m}. \tag{25}$$

Пусть задана $(n\times m)$-матрица $A$. Обозначим символом $A_{ql}=(a_{ij}^{ql})$ $(n\times 2)$-матрицу, состоящую из $q$-го и $l$-го столбца матрицы $A$:

$$a_{i1}^{ql}=a_{iq},\ a_{i2}^{ql}=a_{il}\qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{26}$$

Определим операцию сложения для матрицы $A_{ql}$ и $(n\times m)$-матрицы $D=(d_{ij})$:

$$D+A_{ql}=H=(h_{ij}),$$

$$h_{ij}=\begin{cases} d_{ij}, & \text{если } j\neq q,\ j\neq l,\\ d_{ij}+a_{ij}, & \text{если } j=q \text{ или } j=l.\end{cases} \tag{27}$$

Предположим, что нам известна некоторая факторная матрица $A_0$ ($A_0$ — $(n\times m)$-матрица). Нашей задачей является нахождение матрицы преобразования $G=T^{-1}$, определяющей ОПС:

$$L^*=A_0G. \tag{28}$$

Матрица $G$ определяется как произведение

$$G=\prod_{l=q+1}^{m}\prod_{q=1}^{m-1}G_{ql}, \tag{29}$$

где $G_{ql}=(g_{ik}^{ql})$ — $(n\times n)$-матрица, определенная следующим образом:

$g^{ql}_{ik} = 1, \quad i = k; \qquad g^{ql}_{qq} = g_{11}; \qquad g^{ql}_{ql} = g_{12}; \qquad g^{ql}_{lq} = g_{21}; \qquad g^{ql}_{ll} = g_{22}.$

где $G$ — $(2 \times 2)$-матрица преобразования в пространстве $R_{ql}$;

$$g^{ql}_{ik} = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Рассмотрим матрицу $A^0_{12}$, определенную из исходной матрицы $A_0$ при помощи формулы (26). Найдем для нее по алгорифму, описанному в п. 5, матрицу преобразования $G_{12}$, определяющую ОПС $\overset{*}{L}_{12}$ (предлагаем здесь, что во всех пространствах $R_{ql}$ существуют нужные нам ОПС). Таким образом,

$$\overset{*}{L}_{12} = A^0_{12} G_{12}.$$

Дальше рассмотрим матрицу

$$A_0 = A^0_{12} + \overset{*}{L}_{12} = A^{12} \tag{30}$$

(сложение понимается здесь в смысле формулы (27)), которая также является факторной матрицей.

Матрицы доверительных границ $B^{12}$ и $C^{12}$ для матрицы $A^{12}$ находятся следующим образом:

$$\begin{cases} B^{12} = B - B_{12} + \overset{*}{B}_{12}, \\ C^{12} = C - C_{12} + \overset{*}{C}_{12}, \end{cases} \tag{31}$$

где матрицы $\overset{*}{B}_{12}$ и $\overset{*}{C}_{12}$, определяемые формулами (17), являются $(n \times 2)$-матрицами доверительных границ матрицы $\overset{*}{L}_{12}$.

Докажем, что возможно определить все матрицы $G_{ql}$, входящие в формулу (29), чем будет доказано и существование ОПС $L^*$, определяемой формулой (28).

Пусть[7] найдены все матрицы $A^{ik}$, $B^{ik}$ и $C^{ik}$ до некоторых $A^{ql}$, $B^{ql}$ и $C^{ql}$ соответственно по формулам (30) и (31). Для нахождения следующих матриц имеются следующие возможности:

a) $l < m$. Найдем по формуле (24) матрицу $A^{ql}_{q+1,l}$ и вычислим для нее по алгорифму п. 5 матрицу преобразования $G_{q+1,l}$ и простую структуру $\overset{*}{L}_{q+1,l}$; затем найдем и матрицы доверительных границ $\overset{*}{B}_{q+1,l}$ и $\overset{*}{C}_{q+1,l}$ по (30), и в конце концов:

$$\begin{aligned} A^{q+1,l} &= A^{ql} - A^{ql}_{q+1,l} + \overset{*}{L}_{q+1,l}, \\ B^{q+1,l} &= B^{ql} - B^{ql}_{q+1,l} + \overset{*}{B}_{q+1,l}, \\ C^{q+1,l} &= C^{ql} - C^{ql}_{q+1,l} + \overset{*}{C}_{q+1,l}. \end{aligned} \tag{32}$$

b) $l = m$, $q < l - 1$. Тогда найдем по формуле (24) матрицу $A^{ql}_{q+1,q+2}$ и определим аналогично случаю a) по формулам (32) матрицы $A^{q+1,q+2}$, $B^{q+1,q+2}$ и $C^{q+1,q+2}$.

c) $l = m$, $q = l - 1$. Найденная матрица $A^{m-1,m}$ уже является искомой простой структурой, т. е.

$$A^{m-1,m} = L^*. \tag{33}$$

[7] Рассмотрим множество подпространств $R_{ql}$, соответственно и матрицы $A_{ql}$, упорядоченной по правилу (25).

Действительно, по доказательству п. 5 в матрице $A^{12}$ число статистических нулей в первом столбце максимальное в классе матриц, полученных из $A_0$ преобразованиями двух первых столбцов; далее в матрице $A^{12}$ число статистических нулей в первом столбце максимальное в классе матриц, полученных из $A_0$ преобразованиями $l$ первых столбцов (так как $\max\limits_{0 \leqslant \omega \leqslant \pi} Z(\omega) \geqslant Z(0)$, то число статистических нулей на каждом шагу может только возрастать).

Так как любое направление оси в пространстве $R^m$ достигается вследствие $m-1$ поворотов, то в матрице $A^{1m}$ максимизируется число статистических нулей в первом столбце.

Для остальных столбцов доказательство аналогичное.

Так как по предположению все множества [8]

$$\mathcal{H}_{ql} = \{L_{ql} : L_{ql} = \tilde{A}\, G_{ql}\,(\varphi_{ql}, \psi_{ql}), \varphi_{ql} \in \Omega_0^1\,(q, l), \psi_{ql} \in \Omega_s^{p_s}\,(q, l)\}$$

являются выпуклыми (здесь $\tilde{A} = A^{q,\, l-1}$, если $l-1 > q$, и $\tilde{A} = A^{q-1,\, l}$, если $l-1 = q$), то и множество

$$\mathcal{H} = \{L : L = A^0 \prod_{l=q+1}^{m} \prod_{q=1}^{m-1} G_{ql}\,(\varphi_{ql}\, \psi_{ql}), \varphi_{ql} \in \Omega_0^1\,(q, l)\, \psi_{ql} \in \Omega_s^{p_s}\,(q, l),$$

$$q = 1, \ldots, m-1, l = q+1, \ldots, m\}$$

как пересечение выпуклых множеств является выпуклым и у матрицы $A_0$ существует ОПС. Нетрудно проверить, что матрица $L^*$, определенная соотношением (33), удовлетворяет и условию (12), являясь тем самым ОПС.

Если некоторое из множеств $\mathcal{H}_{ql}$ не является выпуклым, т. е. на некотором шагу у матрицы $A^{ql}$ не существует ОПС, то и у матрицы $A_0$ не существует ОПС и при данном $N$ и $\alpha$ для нее можно определить более чем одну ПС.

Аналогично можно найти и О$\perp$ПС, только применяя во всех рассуждениях вместо матриц $G_{ql}(\varphi_{ql}, \psi_{ql})$ матрицы $V_{ql}(\varphi_{ql})$ (см. формулу (16)). Если на каждом шагу существует О$\perp$ПС $\overset{*}{Q}_{ql}$ $(q = 1, \ldots, m-1;$ $l = q+1, \ldots, m)$, то и у матрицы $A_0$ существует О$\perp$ПС $Q^*$, которая определяется равенством

$$Q^* = A^{m-1,\, m},$$

где $A^{ql}$ определяется соотношениями (27) — (32), заменяя только матрицы $G_{ql}$ на $V_{ql}$ и $\overset{*}{L}_{ql}$ на $\overset{*}{Q}_{ql}$.

Если для матрицы $A_0$ найдены ОПС $L^*$ и О$\perp$ПС $Q^*$, то просто найти и величины $r$ и $v$. Если притом $r = v$, то у матрицы $A_0$ существует и ВО$\perp$ПС $Q^{**}$, которой является уже найденная матрица $Q^*$. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы у каждой матрицы $A^{ql}$ существовала ВО$\perp$ПС $\overset{**}{Q}_{ql}$.

---

[8] Обозначим величины $\varphi$, $\psi$, $\Omega_i^j$ и $\mathcal{H}$, определенные в пространстве $R_{ql}$, соответственно символами $\varphi_{ql}$, $\psi_{ql}$, $\Omega_i^j\,(q, l)$ и $\mathcal{H}_{ql}$.

## 8. Число нужных факторов

Обычно факторная матрица дается в такой форме, что в первом столбце сумма абсолютных величин элементов максимальна (это соответствует так наз. «главному фактору»), и эта сумма монотонно убывает по столбцам.

Таким образом можно преобразовать в конце концов и найденные $L^*$ и $Q^*$.

Если в некотором столбце матрицы $L^*$ (или $Q^*$) все элементы равны статистическим нулям, то соответствующий фактор не имеет статистически значимого значения и им можно пренебречь. Таким же образом можно опускать и факторы, имеющие только один отличный от статистического нуля факторный вес, ибо такой фактор выражает только особенности соответствующего признака.

Автор выражает благодарность И. Петерсену и Р. Тамместе за ценные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Небылицын В. Д., Вопросы психологии, 4, 45—60 (1960).
2. Ahmavaara J., Ann. Acad. Sci. Fenniae (Helsinki), Ser. B., **106**, 176 (1957).
3. Harman H., Modern Factor Analysis, Chicago, 1960.
4. Lawley D. N., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **60**, 64—82 (1940).
5. Lawley D. N., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **64** (2), 175—189 (1955).
6. Maxwell E., Psycholog. Bull., **50**, No. 3, 228—235 (1959).
7. Tiit E., Сб. науч. тр. Эст. с.-х. акад., **31**, 122—135 (1963).
8. Upsala Symposium on Psychological Factor Analysis, 17—19 March 1953, Uppsala, 1953.

*Тартуский государственный университет*

Поступила в редакцию
12/IX 1967

*E. TIIT*

### LIHTSTRUKTUURI MÄÄRAMISEST FAKTORANALÜÜSIS

Olgu $X = (X_1, \ldots, X_n)$ juhuslik vektor, $\mathbf{M}(X_i) = 0$, $\mathbf{D}(X_i) = 1$. Eeldame, et meil on teada faktormaatriks $A$ nii, et

$$X = AF + U,$$

kus $F$ on faktorvektor, $U$ — omapäravektor. Olgu teada ka maatriksi $A$ alumiste ja ülemiste usalduspiiride maatriksid $B$ ja $C$ (mingi olulisusnivoo korral).

Lihtstruktuur leitakse kui maatriks

$$L = AG,$$

mis sisaldab maksimaalse hulga statistilisi nulle. Kui maatriks $G$ on ortogonaalne, siis $L = Q$ on ortogonaalne lihtstruktuur.

Selgitatakse välja, millisel juhul faktormaatriksil $A$ üldse eksisteerib loomulik lihtstruktuur ning millal selleks sobib ka ortogonaalne lihtstruktuur. Selleks võetakse kasutusele optimaalse (s. o. teatud mõttes üheselt määratud) ja optimaalse ortogonaalse lihtstruktuuri mõisted.

*E. TIIT*

## SIMPLE STRUCTURE IN FACTOR ANALYSIS

If vector $X=(X_1,\ldots,X_n)$, $\mathbf{M}(X_i)=0$, $\mathbf{D}(X_i)=1$ with the supposed known factor matrix $A$ then we may assume that

$$X=AF+U,$$

with $F$ — factorial vector, $U$ — specific vector, and that matrices of the lower and upper confidence limits of $A$ are known.

Then the simple structure

$$L=AG,$$

i. e. a matrix that contains maximum statistical zeroes, will be found.

If $G$ is orthogonal, then $L$ is an orthogonal simple structure.

We have found when factor matrix $A$ has no natural simple structure at all and when it has only an oblique but no orthogonal simple structure.

In this paper the optimal simple structure and the optimal orthogonal simple structure have been defined.