EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.02

И. КЕЙС

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Для системы из шести уравнений Эйлера—Пуассона, описывающих движение гиростата в консервативном поле, обладающем силовой функцией U, известен интеграл Якоби (J_1), площадей (J_2) и косинусов. Используя эти интегралы, можно согласно [1] понизить порядок системы уравнений на три единицы и привести ее к системе трех уравнений, определяющих дифференциалы переменных Дарбу через дифференциалы времени и одну проекцию вектора угловой скорости Ω, вообще говоря, неявным образом. Эту особенность системы можно устранить, прибегнув к предложенному П. В. Мясниковым приему понижения порядка исходной системы уравнений, и получить новую совокупность уравнений, пригодную для различных исследований.

1. Рассматриваемая система уравнений движения гиростата получается циклической заменой переменных и постоянных из строк

$$d\gamma_1/dt = x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3$$

$$I_1\, dx_1/dt = (I_2 - I_3)\, x_2 x_3 + k_2 x_3 - k_3 x_2 + \gamma_3 \partial U/\partial\gamma_2 - \gamma_2 \partial U/\partial\gamma_3 \quad (1.1)$$

и обладает нетривиальными интегралами

$$J_1 = I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 - 2(U + h) = 0 \quad (1.2)$$

$$J_2 = (I_1 x_1 + k_1)\gamma_1 + (I_2 x_2 + k_2)\gamma_2 + (I_3 x_3 + k_3)\gamma_3 - \sigma = 0.$$

Определим новую переменную x_0 линейной функцией величин x

$$x_0 = I_1 \xi_1 x_1 + I_2 \xi_2 x_2 + I_3 \xi_3 x_3 \quad (1.3)$$

с коэффициентами ξ_i $(i = \overline{1,3})$, зависящими, вообще говоря, от переменных γ. К интегралам (1.2), выражению (1.3) и уравнениям (1.1) в переменных $y_i = I_{(i)}^{1/2} x_i$, $z_k = I_{(k)}^{1/2} \gamma_k$ $\quad (i, k = \overline{1,3})$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2(U + h)$$

$$z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 = \sigma - (I_1^{-1/2} k_1 z_1 + I_2^{-1/2} k_2 z_2 + I_3^{-1/2} k_3 z_3) \quad (1.4)$$

$$I_1^{1/2}\, dy_1/dt = (I_2 - I_3)\, (I_2 I_3)^{-1/2}\, y_2 y_3 + k_2 I_3^{-1/2} y_3 - k_3 I_2^{-1/2} y_2 +$$

$$+ I_3^{-1/2} z_3 \partial U/\partial\gamma_2 - I_2^{-1/2} z_2 \partial U/\partial\gamma_3$$

$$I_1^{-1/2}\, dz_1/dt = (I_2 I_3)^{-1/2} (z_2 y_3 - z_3 y_2)$$

применим прием исключения переменных y, предложенный в [2] формулами

$$H_0 y_i = H^{1/2} W_i - H_1 z_i - H_2 \eta_i \qquad (i=\overline{1,3}), \tag{1.5}$$

в которых введены обозначения

$$H_0 = (z,z)(\eta,\eta) - (z,\eta)^2, \quad H_1 = x_0 (z,\eta) - \sigma_1 (\eta,\eta), \quad H_2 = \sigma_1 (z,\eta) - x_0 (z,z)$$

$$H = 2(U+h) H_0 + \sigma_1 H_1 + x_0 H_2, \quad W_1 = z_2\eta_3 - z_3\eta_2, \quad \eta_i = I_{(i)}^{1/2} \xi_i \tag{1.6}$$

$$\sigma_1 = \sigma - (k_1 I_1^{-1/2} z_1 + k_2 I_2^{-1/2} z_2 + k_3 I_3^{-1/2} z_3), \quad (u,v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Согласно обозначениям (1.6) выражение для H можно переписать в виде произведения сомножителей

$$H = (z,z)(2\varepsilon_1 x_0 - x_0^2 - \varepsilon_2); \tag{1.7}$$

коэффициенты ε_1 и ε_2 во втором из них равны

$$\varepsilon_1 = (z,\eta)\,\sigma_1\,(z,z)^{-1}, \quad \varepsilon_2 = [(\eta,\eta)\sigma_1^2 - 2(U+h)H_0](z,z)^{-1}. \tag{1.8}$$

Определим переменную x_0 и радикал из второго сомножителя в (1.7) трехчленами

$$x_0 = r w^{-1} + r_0 + r_1 w$$

$$(2\varepsilon_1 x_0 - x_0^2 - \varepsilon_2)^{1/2} = s w^{-1} + s_0 + s_1 w, \tag{1.9}$$

в которых w — новая независимая переменная, а коэффициенты — функции z и η, подлежащие определению. Сравнением коэффициентов при наивысшей и наинизшей независимой переменной w согласно формулам (1.9) получим следующие условия на коэффициенты r, s:

$$s^2 = -r^2, \quad s_1^2 = -r_1^2. \tag{1.10}$$

Из выражений (1.9) очевидно, что $r^2 + r_1^2 \neq 0$. Равенства (1.10) определяют три типа последующих решений:

$$1^\circ \quad s = -ir, \quad s_1 = ir_1$$

$$2^\circ \quad s = ir, \qquad s_1 = ir_1$$

$$3^\circ \quad s = -ir, \quad s_1 = -ir_1. \tag{1.11}$$

Дополним равенства (1.10) оставшимися условиями

$$r(\varepsilon_1 - r_0) = s s_0$$

$$r_1(\varepsilon_1 - r_0) = s_0 s_1$$

$$2\varepsilon_1 r_0 - 2 r r_1 - r_0^2 - \varepsilon_2 = 2 s s_1 + s_0^2. \tag{1.12}$$

Легко показать, что решения 2° и 3°, отвечающие формулам (1.11), приводят к условию $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$, эквивалентному ввиду равенств (1.6) и (1.8), следующему выражению для силовой функции

$$U = U_0 = 0{,}5\sigma_1^2 (z,z)^{-1} - h \qquad (H_0 \neq 0).$$

Оставив случай U_0, обследуем решение системы (1.10), (1.12), соответствующее равенствам 1° (1.11). Последнее дается формулами

$$\begin{aligned} r &= 0{,}5\varrho(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{1/2}, \quad r_0=\varepsilon_1, \quad r_1=0{,}5\varrho^{-1}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{1/2} \\ s &= -0{,}5i\varrho(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{1/2}, \quad s_0=0, \quad s_1=0{,}5i\varrho^{-1}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

в которых ϱ — произвольная функция величин z, η. Ввиду соотношений (1.7) и (1.13) выражения для функций x_0 и $H^{1/2}$ равны

$$\begin{aligned} x_0 &= \nu_2(\varrho w^{-1}+2\nu_1+\varrho^{-1}w) \\ H^{1/2} &= i\nu_0(\varrho^{-1}w-\varrho w^{-1}). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь обозначены

$$\nu_0=0{,}5(z,z)^{1/2}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{1/2}, \quad \nu_1=\varepsilon_1(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{-1/2},$$

$$\nu_2=0{,}5(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2)^{1/2} \qquad (U \geqslant U_0).$$

Для величин y_i получаем из формулы (1.5) с учетом значений (1.14) выражения

$$y_i=y_{i1}w^{-1}+y_{i0}+y_{i2}w, \tag{1.15}$$

в которых коэффициенты y_{ij} $(i=\overline{1,3};\ j=\overline{0,2})$ имеют смысл

$$\begin{aligned} y_{i1} &= H_0^{-1}\{-i\nu_0\varrho W_i+\nu_2\varrho[(z,z)\eta_i-(z,\eta)z_i]\} \\ y_{i0} &= H_0^{-1}\{2\nu_1\nu_2[(z,z)\eta_i-(z,\eta)z_i]+\sigma_1[(\eta,\eta)z_i-(z,\eta)\eta_i]\} \\ y_{i2} &= H_0^{-1}\{i\nu_0\varrho^{-1}W_i+\nu_2\varrho^{-1}[(z,z)\eta_i-(z,\eta)z_i]\}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Поскольку переменные z связаны тривиальным интегралом

$$I_1^{-1}z_1^2+I_2^{-1}z_2^2+I_3^{-1}z_3^2=1,$$

осуществим переход к независимым величинам Дарбу

$$I_1^{-1/2}z_1=2u(1+u^2+v^2)^{-1}, \quad I_2^{-1/2}z_2=2v(1+u^2+v^2)^{-1},$$

$$I_3^{-1/2}z_3=(u^2+v^2-1)(1+u^2+v^2)^{-1},$$

для которых из трех уравнений Пуассона в (1.1) получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} du/dt &= -I_1^{-1/2}y_1uv+0{,}5I_2^{-1/2}y_2(1+u^2-v^2)+I_3^{-1/2}y_3v \\ dv/dt &= 0{,}5I_1^{-1/2}y_1(u^2-v^2-1)+I_2^{-1/2}y_2uv-I_3^{-1/2}y_3u. \end{aligned} \tag{1.17}$$

В пункте 1 все величины, зависящие от z произвольным или неопределенным образом, считаем соответствующими функциями от переменных Дарбу.

Дифференцируя переменную x_0 в силу выражений (1.14) и уравнений (1.1) или (1.4), получим значение ее производной по времени:

$$dw/dt = \nu_2^{-1} w^2 (\varrho^{-1} w^2 - \varrho)^{-1} [y_i \eta_i' + (\eta_i, y_i') - w^{-1} (\nu_2 \varrho)' - 2(\nu_1 \nu_2)' - w (\nu_2 \varrho^{-1})'] \qquad (f' = df/dt).$$

Если в это уравнение подставить выражения производных (1.17) и сгруппировать по степеням y, то в квадратных скобках приведенной строки получим выражение

$$\begin{gathered}(m_1 \partial\eta_1/\partial u + n_1 \partial\eta_1/\partial v) y_1^2 + (m_2 \partial\eta_2/\partial u + n_2 \partial\eta_2/\partial v) y_2^2 + \\ + (m_3 \partial\eta_3/\partial u + n_3 \partial\eta_3/\partial v) y_3^2 + (d_3 \eta_3 + m_2 \partial\eta_1/\partial u + m_1 \partial\eta_2/\partial u + \\ + n_2 \partial\eta_1/\partial v + n_1 \partial\eta_2/\partial v) y_1 y_2 + (d_2 \eta_2 + m_1 \partial\eta_3/\partial u + m_3 \partial\eta_1/\partial u + \\ + n_1 \partial\eta_3/\partial v + n_3 \partial\eta_1/\partial v) y_1 y_3 + (d_1 \eta_1 + m_2 \partial\eta_3/\partial u + m_3 \partial\eta_2/\partial u + \\ + n_2 \partial\eta_3/\partial v + n_3 \partial\eta_2/\partial v) y_2 y_3 + (U m_1 + V n_1 + \eta_2 e_3 - \eta_3 e_2) y_1 + \qquad (1.18) \\ + (U m_2 + V n_2 + \eta_3 e_1 - \eta_1 e_3) y_2 + (U m_3 + V n_3 + \eta_1 e_2 - \eta_2 e_1) y_3 + \\ + [a_3 v \eta_3 - a_1 u v \eta_1 + 0{,}5 a_2 (1 + u^2 - v^2) \eta_2] \partial S/\partial u + \\ + [0{,}5 a_1 (u^2 - v^2 - 1) \eta_1 + a_2 u v \eta_2 - a_3 u \eta_3] \partial S/\partial v,\end{gathered}$$

для которого использованы обозначения

$$\begin{gathered}a_i = I_i^{-1/2}, \quad m_1 = -a_1 u v, \quad m_2 = 0{,}5 a_2 (1 + u^2 - v^2), \\ m_3 = a_3 v, \quad d_0 = (I_1 I_2 I_3)^{-1/2}, \; n_1 = 0{,}5 a_1 (u^2 - v^2 - 1), \; n_2 = a_2 u v, \\ n_3 = -a_3 u, \; e_1 = k_1 a_2 a_3, \quad e_2 = k_2 a_1 a_3, \; e_3 = k_3 a_1 a_2 \\ d_1 = d_0 (I_2 - I_3), \; d_2 = d_0 (I_3 - I_1), \; d_3 = d_0 (I_1 - I_2) \\ U = u_{11} w^{-1} + u_{10} + u_{12} w, \; V = v_{11} w^{-1} + v_{10} + v_{12} w \\ u_{11} = -(\nu_2 \partial\varrho/\partial u + \varrho \partial\nu_2/\partial u), \; u_{10} = -2 \partial(\nu_1 \nu_2)/\partial u, \\ \qquad (1.19) \\ u_{12} = \varrho^{-1} (\nu_2 \varrho^{-1} \partial\varrho/\partial u - \partial\nu_2/\partial u), \quad v_{11} = -(\nu_2 \partial\varrho/\partial u + \varrho \partial\nu_2/\partial v), \\ v_{10} = -2 \partial(\nu_1 \nu_2)/\partial v, \qquad v_{12} = \varrho^{-1} (\nu_2 \varrho^{-1} \partial\varrho/\partial v - \partial\nu_2/\partial v).\end{gathered}$$

Подставляя в выражение (1.18) значения переменных y из формул (1.15), получим следующее разложение по степеням w:

$$D_{-2} w^{-2} + D_{-1} w^{-1} + D_0 + D_1 w + D_2 w^2 \qquad (1.20)$$

$$\begin{gathered}D_{-2} = L_i y_{i1}^2 + L_{ij} y_{i1} y_{j1} + g_{i1} y_{i1} \\ D_{-1} = 2 L_i y_{i0} y_{i1} + L_{kj} (y_{k0} y_{j1} + y_{k1} y_{j0}) + l_i y_{i1} + g_{i0} y_{i1} + g_{i1} y_{i0} \qquad (1.21) \\ D_0 = L_i (y_{i0}^2 + 2 y_{i1} y_{i2}) + L_{kj} (y_{k0} y_{j0} + y_{k1} y_{j2} + y_{k2} y_{j1}) + l_i y_{i0} + g_{i0} y_{i0} + \\ + g_{i1} y_{i2} + g_{i2} y_{i1} + [a_3 v \eta_3 - a_1 u v \eta_1 + 0{,}5 a_2 (1 + u^2 - v^2) \eta_2] \partial S/\partial u + \\ + [0{,}5 a_1 \eta_1 (u^2 - v^2 - 1) + a_2 u v - a_3 u \eta_3] \partial S/\partial v \\ D_1 = 2 L_i y_{i0} y_{i2} + L_{kj} (y_{k0} y_{j2} + y_{k2} y_{j0}) + g_{i0} y_{i2} + g_{i2} y_{i0} + l_i y_{i2} \\ D_2 = L_i y_{i2}^2 + L_{kj} y_{k2} y_{j2} + g_{i2} y_{i2} \qquad (i, j = \overline{1, 3}; \; k < j),\end{gathered}$$

причем

$$L_1 = m_1 \partial\eta_1/\partial u + n_1 \partial\eta_1/\partial v$$
$$L_{12} = d_3\eta_3 + m_2\partial\eta_1/\partial u + m_1\partial\eta_2/\partial u + n_2\partial\eta_1/\partial v + n_1\partial\eta_2/\partial v$$
$$l_1 = e_3\eta_2 - e_2\eta_3$$
$$g_{il} = m_i u_{1j} + n_i v_{1j} \qquad \left\{\begin{matrix} 1, 2, 3 \\ i = \overline{1, 3} \\ j = \overline{0, 2} \end{matrix}\right\}$$

2. Используя выражения (1.17), (1.20), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} dw/dt &= \nu_2^{-1} (\varrho^{-1}w^2 - \varrho)^{-1} (D_{-2} + D_{-1}w + D_0w^2 + D_1w^3 + D_2w^4) \\ du/dt &= m_iy_{i1}w^{-1} + m_iy_{i0} + m_iy_{i2}w \\ dv/dt &= n_iy_{i1}w^{-1} + n_iy_{i0} + n_iy_{i2}w, \end{aligned} \tag{2.1}$$

которая представляет собой результат понижения порядка системы (1.1). Уравнения (2.1) существуют, если выполнены условия $\nu_2 \neq 0$ и $w^2 \neq \varrho^2$. Первое из них соответствует выражениям силовой функции, отличным от U_0, второе выделяет область, не принадлежащую «поверхности» S_0: $w^2 - \varrho^2(u, v) = 0$, в которой, вообще говоря, находятся интегральные кривые уравнений (2.1), если S_0 не является их интегральной «поверхностью». Коэффициенты при степенях переменной w в уравнениях (2.1) являются, согласно выражениям (1.6), (1.14), (1.16), (1.19), (1.21) и (1.22), известными функциями переменных u, v в случае произвольного выбора величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \varrho$ как функций от величин u, v, подчиненных лишь двум неравенствам

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 \neq 0, \qquad \varrho \neq 0.$$

Перечислим некоторые упрощения, которые можно внести в систему (2.1), используя произвол выбора функций η, ϱ. Если функции η, ϱ удовлетворяют уравнениям в частных производных, соответствующих равенствам

$$D_{-2} + \varrho^2 D_0 = D_{-1} = D_1 = D_2 = 0, \tag{2.2}$$

то первое уравнение системы (2.1) не зависит от переменной w. В случае, если функции η, ϱ являются решениями двух аналогичных уравнений

$$D_{-1} + D_1\varrho^2 = D_{-2} + D_0\varrho^2 + D_2\varrho^4 = 0, \tag{2.3}$$

то первое уравнение в системе (2.1) типа Риккати:

$$dw/dt = D_2\varrho w^2 + D_1\varrho w + (D_2\varrho + D_0)\varrho.$$

Алгебраические условия

$$m_iy_{i1}n_jy_{j0} - m_ry_{r0}n_sy_{s1} = m_iy_{i1}n_\sigma y_{\sigma 2} - n_\mu y_{\mu 1} m_l y_{l2} = 0 \tag{2.4}$$
$$(i, j, r, s, \mu, l = \overline{1, 3})$$

на величины η, ϱ приводят к тому, что отношение дифференциалов переменных u и v не зависит от w. Полагая коэффициенты $m_i y_{i1}$, $m_i y_{i2}$, $n_i y_{i1}$ или же $m_i y_{i1}$, $n_i y_{i1}$, $n_i y_{i2}$ равными нулю, приходим к случаю, когда одна из производных du/dt, dv/dt не зависит от переменной w, а другая зависит линейно.

Необходимо отметить, что для действительности величин y_i должно выполняться ввиду равенств (1.15) и (1.16) следующее условие на квадрат модуля комплексной переменной w:

$$w\overline{w} = \|\varrho\|^2 \tag{2.5}$$

независимо от того, разумеем ли мы под ϱ действительную или комплексную функцию переменных u, v.

Если ввести комплексные переменные ξ, ζ равенствами $\xi = u + iv$, $\zeta = -\overline{\xi}^{-1}$, то для них согласно равенствам (1.17) имеем уравнение Дарбу [3]

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= 0{,}5(a_2y_2 + ia_1y_1)\xi^2 - ia_3y_3\xi + 0{,}5(a_2y_2 - ia_1y_1) \\ d\zeta/dt &= 0{,}5(a_2y_2 + ia_1y_1)\zeta^2 - ia_3y_3\zeta + 0{,}5(a_2y_2 - ia_1y_1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Располагая выражением силовой функции $\Psi(\xi, \zeta) = S(u, v) = U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, получим для проекции момента внешних сил значения

$$0{,}5i[(\xi^2 - 1)\partial\Psi/\partial\xi + (\zeta^2 - 1)\partial\Psi/\partial\zeta], \quad 0{,}5[(\xi^2+1)\partial\Psi/\partial\xi + (\zeta^2+1)\partial\Psi/\partial\zeta], \\ -i(\xi\partial\Psi/\partial\xi + \zeta\partial\Psi/\partial\zeta). \tag{2.7}$$

Значение производной dw/dt определяется равенством (2.1), в котором выражение D_k следует составить по формулам (1.21), заменив величины L_i, L_{kj}, g_{il} $(i, j = \overline{1,3};\ l = \overline{0,2};\ k < j)$ соответственно на $\overset{0}{L_i}$, $\overset{0}{L_{kj}}$, $\overset{0}{g_{il}}$, которые получаем из равенств (1.22) заменами величин m_i на $\overset{0}{m_i}$, u_{1l} на $\overset{0}{u_{1l}}$, v_{1l} на $\overset{0}{v_{1l}}$, u на ξ, v на ζ, которые определяются равенствами

$$\overset{0}{m_1} = 0{,}5ia_1(\xi^2 - 1), \quad \overset{0}{m_2} = 0{,}5a_2(\xi^2 + 1), \quad \overset{0}{m_3} = -a_3i\xi$$

$$\overset{0}{n_1} = 0{,}5ia_1(\zeta^2 - 1), \quad \overset{0}{n_2} = 0{,}5a_2(\zeta^2 + 1), \quad \overset{0}{n_3} = -a_3i\zeta$$

$$\overset{0}{u_{11}} = -(\nu_2\partial\varrho/\partial\xi + \varrho\partial\nu_2/\partial\xi), \quad \overset{0}{u_{10}} = -2\partial(\nu_1\nu_2)/\partial\xi,$$

$$\overset{0}{u_{12}} = \varrho^{-1}(\nu_2\varrho^{-1}\partial\varrho/\partial\xi - \partial\nu_2/\partial\xi), \quad \overset{0}{v_{11}} = -(\nu_2\partial\varrho/\partial\zeta + \varrho\partial\nu_2/\partial\zeta),$$

$$\overset{0}{v_{10}} = -2\partial(\nu_1, \nu_2)/\partial\zeta, \quad \overset{0}{v_{12}} = \varrho^{-1}(\nu_2\varrho^{-1}\partial\varrho/\partial\zeta - \partial\nu_2/\partial\zeta).$$

Образованные указанным способом коэффициенты обозначим $\overset{0}{D_i}$. Переход от переменных u, v к комплексным величинам ξ, ζ всюду предполагается осуществленным, в частности, коэффициенты y_{i1}, y_{i0}, y_{i2} получаются из формул (1.16) заменой в них z_i на выражения

$$z_1 = (1 - \xi\zeta)(\xi - \zeta)^{-1}, \; z_2 = i(1 + \xi\zeta)(\xi - \zeta)^{-1}, \; z_3 = (\xi + \zeta)(\xi - \zeta)^{-1}.$$

Ввиду значений (2.7) в сумме D_0 необходимо еще осуществить замену суммы

$$[a_3v\eta_3 + 0{,}5a_2(1 + u^2 - v^2)\eta_2 - a_1uv\eta_1]\partial S/\partial u + \\ + [0{,}5a_1\eta_1(u^2 - v^2 - 1) + a_2uv\eta_2 - a_3u\eta_3]\partial S/\partial v$$

на

$$[0{,}5i\,(\xi^2 - 1)\,\eta_1 + 0{,}5\,(\xi^2 + 1)\,\eta_2 - i\xi\eta_3]\,\partial\Psi/\partial\xi +$$
$$+ [0{,}5i\,(\zeta^2 - 1)\,\eta_1 + 0{,}5\,(\zeta^2 + 1)\,\eta_2 - i\zeta\eta_3]\,\partial\Psi/\partial\zeta.$$

В новых переменных w, ξ, ζ система уравнений (2.1), (2.6) приобретает вид

$$dw/dt = \nu_2^{-1}\,(\varrho^{-1}\,w^2 - \varrho)^{-1}\,(\overset{0}{D}_{-2} + \overset{0}{D}_{-1}\,w + D_0 w^2 + D_1 w^3 + D_2 w^4)$$
$$d\xi/dt = \overset{0}{m_i}\,y_{i1} w^{-1} + \overset{0}{m_i}\,y_{i0} + \overset{0}{m_i}\,y_{i2} w$$
$$d\zeta/dt = \overset{0}{n_i}\,y_{i1} w^{-1} + \overset{0}{n_i}\,y_{i0} + \overset{0}{n_i}\,\overset{0}{y}_{i2}\,w.$$

Предположим, что $\varrho = \varrho(\xi)$, а функции $\eta_i = \eta_i(\xi, \zeta)$ можно подобрать так, что члены $\nu_2^{-1}\overset{0}{D}_\sigma$ и $\overset{0}{m_i}\,y_{il}$ представляются в виде произведений $\delta(\xi, \zeta)\,D^1_\sigma\,(\xi)$ и $\delta(\xi, \zeta)\,\zeta_l\,(\xi)$ $(\sigma = -\overline{2, 2};\ l = \overline{0, 2})$. Избирая в этом случае новое время τ таким, что $d\tau = \delta(\xi, \zeta)\,dt$, и отбрасывая третье уравнение системы (2.7), получим замкнутую систему из двух уравнений

$$dw/dt = (D^1_{-2} + D^1_{-1}\,w + D^1_0 w^2 + D^1_1 w^3 + D_2 w^4)\,(\varrho^{-1}\,w^2 - \varrho)^{-1}$$
$$d\xi/dt = \zeta_1 w^{-1} + \zeta_0 + \zeta_2 w$$

относительно комплексных переменных w и ξ.

Возвращаясь к системе (2.1), заметим, что, определяя действительную и мнимую части комплексной переменной w равенствами $w_1 = \|\varrho\|\cos\nu t$, $w_2 = \|\varrho\|\sin\nu t$ $(w = w_1 + iw_2)$ и считая ν достаточно «большим» или «малым» параметром, можно строить ряды, определяющие «быстрые» или «медленные» движения гиростата. Выбор знака перед $H^{1/2}$ в формулах (1.5) необходимо сообразовать с начальными данными переменных $y_i(0)$ после окончательного выбора функций $\eta_1(u, v)$ и $\varrho(u, v)$. При $U = U_0$ имеем согласно (2.1) для w уравнение типа Риккати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейс И. А., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **15**, № 3, 366—368 (1966).
2. Hess W., Math. Ann., **37**, 153 (1890).
3. Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1887, vol. I, chap. 2.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/V 1967

I. KEIS

ÜHE KINNITUSPUNKTIGA GÜROSTAADI LIIKUMISVÕRRANDITEST

Artiklis tõestatakse, et ühe kinnituspunktiga gürostaadi kuus liikumisvõrrandit võib teatavate integraalide abil taandada spetsiaalsele kujule, kus võrrandeid on ainult kolm.

I. KEIS

ABOUT THE FORM OF EQUATIONS CORRESPONDING TO THE MOTION OF A GYROSTAT WITH A SINGLE POINT FIXED

It is proved that six equations corresponding to the motion of a gyrostat with a single point fixed can be reduced to a special system consisting of only three equations.