EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.19

Я. ЛЫХМУС

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СИНГУЛЯРНЫХ СЖАТИЯХ ГРУПП Ли

J. LÕHMUS. MÕNED MÄRKUSED Lie- RÜHMADE SINGULAARSETE KONTRAKTSIOONIDE KOHTA

J. LÕHMUS. SOME REMARKS CONCERNING SINGULAR CONTRACTIONS OF Lie GROUPS

В [1] впервые четко сформулирован предельный переход в алгебраическом многообразии всевозможных лиевых структур заданной размерности r. Алгебры Ли однопараметрического семейства $\{L(\varepsilon)\}$ изоморфные друг другу при $\varepsilon \neq 0$, переходят в пределе $\varepsilon = 0$ в алгебру $L(0)$, неизоморфную алгебрам $\{L(\varepsilon), \varepsilon \neq 0\}$. При этом алгебры $L(\varepsilon)$ зависят от предельного параметра ε весьма специальным образом — они получаются из некоторой исходной (допредельной) алгебры L преобразованием ее базиса $\{I_i;\ i = 1, 2, \ldots, r\}$ матрицей $A(\varepsilon)$, являющейся прямой суммой квадратных блоков $I + \varepsilon v$ (порядка $s < r$) и εI (порядка $r - s$). Здесь I обозначают единичные матрицы соответствующих (порядков), а v — некоторая регулярная матрица порядка s. Матрицу $I + \varepsilon v$ можно назвать также регулярной частью матрицы $A(\varepsilon)$. Предельный переход такого типа в дальнейшем называется IW-сжатием. Любые матрицы $A(\varepsilon)$, зависящие каким-то образом от непрерывного параметра ε и превращающиеся в сингулярные при $\varepsilon = 0$ (т. е. $\det A(0) = 0$), будем называть *матрицами ε-вырожденных преобразований*. В пределе они переходят в *вырожденные предельные преобразования* [2].

Позже были предложены сингулярные обобщения IW-сжатий, при которых генераторы $\{I_i; i = 1, 2, \ldots, r\}$ алгебры умножаются каждый на некоторую степень ε^{m_i} одного и того же параметра [3] или на произведение $\varepsilon_1^{m_i^{(1)}} \varepsilon_2^{m_i^{(2)}} \ldots \varepsilon_k^{m_i^{(k)}}$ нескольких предельных параметров в разных степенях [2]. При таких «чистых» сингулярных сжатиях регулярная часть (типа $I + \varepsilon v$) в ε-преобразовании может вовсе отсутствовать.

Целью настоящей заметки является указание условий осуществимости «чистых» сингулярных сжатий с одним предельным параметром.

Подразделим генераторы $\{I_i;\ i = 1, 2, \ldots, r\}$ в p группы

$$\{I_{i_1}^{(1)}\},\ \{I_{i_2}^{(2)}\}, \ldots,\ \{I_{i_p}^{(p)}\}, \tag{1}$$

где $i_1 = 1, 2, \ldots, r_1$; $i_2 = r_1 + 1,\ r_1 + 2, \ldots, r_2; \ldots$; $i_p = r_{p-1} + 1,\ r_{p-1} + 2, \ldots, r$, $(r_0 = 0)$, и напишем допредельные соотношения коммутации в виде

$$[I_i^{(\alpha)},\ I_j^{(\beta)}] = c_{\alpha i,\, \beta j}^{\gamma k}\ I_k^{(\gamma)}, \tag{2}$$

$$i = r_{\alpha-1} + 1,\ r_{\alpha-1} + 2, \ldots, r_\alpha;\ j = r_{\beta-1} + 1,\ r_{\beta-1} + 2, \ldots, r_\beta;$$

$$k = r_{\gamma-1} + 1,\ r_{\gamma-1} + 2, \ldots, r_\gamma;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p.$$

Произведем ε-преобразование

$$I_{i_1}^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon^{m_1} I_{i_1}^{(1)},\ I_{i_2}^{(2)}(\varepsilon) = \varepsilon^{m_2} I_{i_2}^{(2)}, \ldots, I_{i_p}^{(p)}(\varepsilon) = \varepsilon^{m_p} I_{i_p}^{(p)}, \tag{3}$$

после которого соотношения коммутации (2) переходят в

$$[I_i^{(\alpha)}(\varepsilon),\ I_j^{(\beta)}(\varepsilon)] = \varepsilon^{m_\alpha + m_\beta - m_1} c_{\alpha i, \beta j}^{1k} I_k^{(1)}(\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^{m_\alpha + m_\beta - m_2} c_{\alpha i, \beta j}^{2k} I_k^{(2)}(\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^{m_\alpha + m_\beta - m_p} c_{\alpha i, \beta j}^{pk} I_k^{(p)}(\varepsilon). \tag{4}$$

В пределе ε-преобразованные генераторы переходят в сжатые: $I_k^{(\gamma)}(\varepsilon) \to I_k^{(\gamma)}(0) = I_k'^{(\gamma)}$. Для обеспечения конечных значений предельных структурных констант показатели степеней должны удовлетворить неравенствам

$$m_\alpha + m_\beta - m_\gamma \geqslant 0. \tag{5}$$

При $m_\alpha + m_\beta - m_\gamma = 0$ соответствующие члены в коммутаторе сохраняются и структурные константы остаются прежними:

$$c'^{\gamma k}_{\alpha i, \beta j} = c^{\gamma k}_{\alpha i, \beta j}. \tag{6}$$

Если $m_\alpha + m_\beta - m_\gamma > 0$, то члены с $I_k'^{(\gamma)}$ исчезают — проекция предельного коммутатора на подпространство $\{I_k'^{(\gamma)}\}$ равна нулю.

Неравенства (5) являются *необходимыми и достаточными условиями* осуществимости «чистого» предельного перехода с ε-преобразованием (3). Условие для IW-сжатий (генераторы $\{I_i^{(1)};\ i = 1, 2, \ldots, s\}$ должны порождать подалгебру) является частным случаем условий (5).

Иногда такие ограничительные условия совсем отпадают. Например, если произвести сингулярное сжатие с ε-преобразованием (3), где $p = 2$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, то сжатие осуществимо при любом разбиении генераторов (т. е. при любом значении r_1).

Наконец, можно еще отметить, что такое простое разбиение генераторов и рассмотрение коммутационных свойств позволяет получить *условия заменимости* данного сингулярного сжатия несколькими последовательными «чистыми» несингулярными IW-сжатиями. Например, сингулярное сжатие с $p = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 1$ заменимо двумя последовательными несингулярными IW-сжатиями с $p' = 3$, $m_1' = m_2' = 1$, $m_3' = 0$ и $p'' = 3$, $m_1'' = m_3'' = 1$, $m_2'' = 0$ (здесь $r_1 = r_1' = r_1''$, $r_2 = r_2' = r_2''$) только тогда, если выполняется специальное добавочное условие $c_{2i, 2j}^{1k} = 0$. Такие добавочные условия можно вывести и в других, более сложных случаях.

При рассмотрении многопараметрических сингулярных сжатий [2] получаются точно такие же условия (5) отдельно для каждого предельного параметра (при предположении независимого устремления параметров к предельным значениям).

ЛИТЕРАТУРА

1. Inönü E., Wigner E. P., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **39**, 510 (1953).
2. Зайцев Г. А., Проблема инвариантно-группового изучения множеств предельных геометрий и специальные подалгебры Ли. Тезисы доклада, Всесоюзная геометрическая конференция, Киев, 1961.
3. Doebner H. D., Melsheimer O., Nuovo Cimento, **49 A**, 306 (1967).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/XII 1967