EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.18

М. ЛЕВИНА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

M. LEVINA. ÜHEST KVADRATUURVALEMITE TULETAMISE MEETODIST

M. LEVINA. ON A METHOD OF DERIVING SOME QUADRATURE FORMULAS

В настоящей заметке показывается, что при получении ряда интерполяционных квадратурных формул с равноотстоящими узлами можно отказаться от требования совпадения многочлена приближения с функцией на концах отрезка интегрирования, заменив его требованием, чтобы сумма квадратов отклонений значений многочлена приближения от функции на концах отрезка была наименьшей.

Покажем, что в случае четного числа узлов $2n+2$ формулы Ньютона-Котеса могут быть получены путем интегрирования многочленов степени $2n$, (а не $2n+1$ как это обычно делается). Одновременно построим эти многочлены и выясним их связь с интегрируемой функцией.

Нам нужны будут следующие две формулы.

Пусть $P_n(x)$ — многочлен Лагранжа, построенный для функции $y=f(x)$ по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а $P_{n+1}(x)$ — многочлен Лагранжа, построенный для этой же функции по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$.

Тогда очевидно

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1})}{w(x_{n+1})} w(x), \tag{1}$$

где $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Для функции $r(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-2n)$ справедливо равенство

$$\int_0^{2n+1} r(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\int_0^{2n+1} x\,r(x)\,dx, \tag{2}$$

в чем легко убедиться, если во втором интеграле сделать замену

$$x = t + \frac{2n+1}{2}.$$

Для функции $y=f(x)$ введем обозначения $y_i = f(i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n+1)$.

Пусть многочлен $P_{2n-1}(x)$ означает многочлен Лагранжа, построенный для функции $f(x)$ по узлам $1, 2, \ldots, 2n$.

Рассмотрим многочлен степени $2n$:

$$\varphi(x) = P_{2n-1}(x) + \lambda r(x), \tag{3}$$

который очевидно совпадает с функцией $f(x)$ в узлах $1, 2, \ldots, 2n$. Выберем λ так, чтобы величина

$$m = [\varphi(0) - y_0]^2 + [\varphi(2n+1) - y_{2n+1}]^2$$

имела наименьшее значение. Тогда из условия $m'_\lambda = 0$, учитывая, что $r(0) = r(2n+1) = (2n)!$, получаем искомое значение λ:

$$\lambda = \frac{1}{2(2n)!}[y_0 + y_{2n+1} - P_{2n-1}(0) - P_{2n-1}(2n+1)]. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), находим многочлен приближения в виде

$$\varphi(x) = P_{2n-1}(x) + \frac{1}{2(2n)!}[y_0 + y_{2n+1} - P_{2n-1}(0) - P_{2n-1}(2n+1)]\, r(x). \tag{5}$$

Теперь убедимся, что, заменив в интеграле

$$\int\limits_0^{2n+1} f(x)\,dx$$

функцию $f(x)$ функцией (5), получим формулу Ньютона-Котеса по $2n+2$ узлам.

На основании формулы (1), выражая $P_{2n+1}(x)$ через $P_{2n}(x)$, а $P_{2n}(x)$ — через $P_{2n-1}(x)$, имеем

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n-1}(x) + \frac{y_0 - P_{2n-1}(0)}{(2n)!}\, r(x) +$$

$$+ \frac{y_{2n+1} - P_{2n-1}(2n+1) - y_0 + P_{2n-1}(0)}{(2n+1)!}\, x r(x). \tag{6}$$

Это есть многочлен Лагранжа, построенный по узлам $0, 1, 2, \ldots, 2n+1$. Поэтому, интегрируя этот многочлен на отрезке $[0, 2n+1]$, получим формулу Ньютона-Котеса с $2n+2$ узлами.

По (6), учитывая формулу (2), имеем

$$\int\limits_0^{2n+1} P_{2n+1}(x)\,dx = \int\limits_0^{2n+1} P_{2n-1}(x)\,dx + \frac{1}{2(2n)!}[y_{2n+1} - P_{2n-1}(2n+1) +$$

$$+ y_0 - P_{2n-1}(0)] \int\limits_0^{2n+1} r(x)\,dx.$$

Но из (5) видно, что интеграл от $\varphi(x)$ на отрезке $[0, 2n+1]$ дает это же выражение, что и доказывает наше утверждение.

Ниже будем пользоваться обозначениями:

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = f(x_i), \quad y'_i = f'(x_i).$$

П р и м е р. Для того чтобы получить квадратурное правило «трех восьмых»

$$\int\limits_{x_i}^{x_i+3h} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h[y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3}],$$

можно подынтегральную функцию на отрезке $[x_i, x_{i+3}]$ заменить трехчленом

$$\varphi(x) = \frac{x_{i+2} - x}{h}\,y_{i+1} + \frac{x - x_{i+1}}{h}\,y_{i+2} + \lambda(x - x_{i+1})\,(x - x_{i+2}),$$

где λ выбирается из условия минимума величины

$$[\varphi(x_i) - y_i]^2 + [\varphi(x_{i+3}) - y_{i+3}]^2.$$

Приведем еще примеры построения квадратурных формул с помощью вышеизложенного приема.

На отрезке $[x_0, x_{2n}]$ строим для $f(x)$ приближение $\varphi(x)$ так: $\varphi(x) = \varphi_{2i}(x)$ на $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, где $\varphi_{2i}(x)$ парабола с вершиной в точке (x_{2i+1}, y_{2i+1}) и такая, что величина

$$m_{2i} = [\varphi_{2i}(x_{2i}) - y_{2i}]^2 + [\varphi_{2i}(x_{2i+2}) - y_{2i+2}]^2$$

принимает наименьшее значение.

Но тогда, как в этом легко убедиться,

$$\varphi_{2i}(x) = y_{2i+1} + \lambda(x - x_{2i+1})^2,$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2h^2}\,(y_{2i} - 2y_{2i+1} + y_{2i+2}).$$

Если в интеграле $\int\limits_{x_0}^{x_0+2nh} f(x)\,dx$ функцию $f(x)$ заменить функцией $\varphi(x)$, то мы получим формулу Симпсона.

Рассмотрим теперь отрезок $[x_0, x_n]$. На нем для функции $f(x)$ построим приближение $\varphi(x)$ так, чтобы $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, где $\varphi_i(x)$ — многочлен второй степени, удовлетворяющий условиям: $\varphi(x_i) = y_i$, $\varphi(x_{i+1}) = y_{i+1}$, а величина $[\varphi'(x_i) - y'_i]^2 + [\varphi'(x_{i+1}) - y'_{i+1}]^2$ принимает наименьшее значение. Получим

$$\varphi_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h}\,y_i + \frac{x - x_i}{h}\,y_{i+1} + \lambda(x - x_i)\,(x - x_{i+1}),$$

$$\lambda = \frac{1}{2h}\,(y'_{i+1} - y'_i).$$

Если теперь вычисление интеграла от $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ заменить вычислением интеграла от $\varphi(x)$ на этом же отрезке, то мы получим уточненную формулу трапеций.

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right] - \frac{h}{12}\,(y'_n - y'_0).$$

Так же, если на каждом отрезке $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ построить для $f(x)$ приближение $\varphi_{2i}(x)$ так, чтобы $\varphi_{2i}(x)$ была бы параболой с вершиной в точке (x_{2i+1}, y_{2i+1}) и величина

$$[\varphi'_{2i}(x_{2i}) - y'_{2i}]^2 + [\varphi'_{2i}(x_{2i+2}) - y'_{2i+2}]^2$$

принимала наименьшее значение, то получим

$$\varphi_{2i}(x) = y_{2i+1} + \lambda(x - x_{2i+1})^2,$$

где

$$\lambda = \frac{1}{4h}(y'_{2i+2} - y'_{2i}).$$

Замена в интеграле функции $f(x)$ функцией $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ приводит к формуле

$$\int_{x_0}^{x_0+2nh} f(x)\,dx \approx 2h \sum_{i=0}^{n-1} y_{2i+1} + \frac{h^2}{6}(y'_{2n} - y'_0),$$

которая точна для любого многочлена третьей степени и является уточненной формулой прямоугольников.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
1/XII 1967