EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1968, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1968.1.14

LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

М. ЛЕВИН

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФОРМУЛЫ ТРАПЕЦИЙ

M. LEVIN. MÄRKUS TRAPETSVALEMI ÜHE OMADUSE KOHTA

M. LEWIN. ÜBER EINE EIGENSCHAFT DER TRAPEZFORMEL

Обозначим через F множество функций $f(x)$, абсолютно непрерывных на отрезке [0; 1] и удовлетворяющих условию

$$\sqrt{\int_0^1 [f'(x)+f(0)-f(1)]^2 dx} \leqslant M.$$

Через F_{01} обозначим то множество функций из F, которое удовлетворяет еще условию $f(0)=f(1)=0$.

Решим следующую экстремальную для формулы Маркова задачу.

Среди формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = Af(0)+\sum_{k=1}^{n} B_k f(x_k)+Cf(1)+R_n(f) \tag{1}$$

выбрать ту (будем ее называть наилучшей), для которой величина

$$R_n = \sup_{f\in F} |R_n(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Сначала рассмотрим эту задачу для функций множества F_{01}. Если $f(x)\in F_{01}$, то имеет место просто проверяемое представление

$$f(x)=\int_0^1 f'(t)[E(x-t)-x]\,dt, \tag{2}$$

где

$$E(y)=\begin{cases}1, & \text{если } y>0\\ 0, & \text{если } y\leqslant 0.\end{cases}$$

Подставляя (2) в (1), найдем для $f \in F_{01}$:

$$R_n(f) = \int_0^1 f'(t) K(t) dt, \tag{3}$$

где

$$K(t) = \tfrac{1}{2} - t - \sum_{k=1}^{n} B_k [E(x_k - t) - x_k].$$

Применяя к (3) неравенство Буняковского, получим

$$|R_n(f)| \leqslant M \sqrt{\int_0^1 K^2(t) dt}. \tag{4}$$

Легко проверить, что функция

$$f(x) = M \left[\int_0^1 K^2(t) dt\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_0^x K(t) dt$$

принадлежит множеству F_{01}. Подстановкой этой функции в (3) убеждаемся, что для нее (4) превращается в равенство. Поэтому

$$\sup_{f \in F_{01}} |R_n(f)| = M \sqrt{\int_0^1 K^2(t) dt}. \tag{5}$$

Теперь найдем числа x_k, B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы величина

$$U = \int_0^1 K^2(t) dt$$

приняла наименьшее значение. Обозначив $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$, имеем

$$U = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K^2(t) dt \geqslant \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)^3. \tag{6}$$

Правая часть (6), как в этом можно убедиться обычными методами математического анализа, при условии $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ принимает наименьшее значение при

$$x_i = \frac{i}{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$U \geqslant \frac{1}{12(n+1)^2}. \tag{8}$$

В (6) будет иметь место равенство, если выбрать числа B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ было

$$K(t) = -t + \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

и x_i вычислены по (7). Но тогда

$$B_i = \frac{1}{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Итак, числа (7) и (9) минимизируют величину U. Согласно вышеприведенным рассуждениям мы имеем по (8), что наименьшее значение величины U равно $\frac{1}{12(n+1)^2}$.

Итак, по (1), (5), (7) и (9) получаем наилучшую для множества F_{01} формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) + R_n(f), \tag{10}$$

$$\sup_{f \in F_{01}} |R_n(f)| = \frac{M}{(n+1)\sqrt{12}}.$$

Теперь рассмотрим формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{2}[f(0)+f(1)] + \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right\} + R_n(f) \tag{11}$$

и покажем, что она и есть наилучшая для множества F формула вида (1).

Для функций из F_{01} формула (11) совпадает с формулой (10). Если $f(x) \in F_{01}$, то $f(x) \in F$ и поэтому

$$\sup_{f \in F_{01}} |R_n(f)| \leqslant \sup_{f \in F} |R_n(f)|. \tag{12}$$

Если $f(x) \in F$, то функция $f(x) - (1-x)f(0) - xf(1) \in F_{01}$.
Кроме этого (так как формула (11) точна для любого многочлена первой степени) имеет место равенство

$$R_n(f(x)) = R_n(f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)).$$

Поэтому

$$\sup_{f \in F} |R_n(f)| \leqslant \sup_{f \in F_{01}} |R_n(f)|. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует равенство

$$\sup_{f \in F} |R_n(f)| = \sup_{f \in F_{01}} |R_n(f)|.$$

Отсюда: так как (11) является наилучшей формулой Маркова для множества F_{01}, то она является наилучшей и для множества F.

Итак, мы доказали теорему:

Для множества функций F наилучшей среди формул типа (1) является формула трапеций (11), причем для нее

$$|R_n(f)| \leqslant R_n = \frac{M}{(n+1)\sqrt{12}}.$$

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
10/I 1967