

*И. ПЕТЕРСЕН, В. КИКАС*

## ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ТВЕРДЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ ВЯЖУЩИХ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Цель настоящей статьи — показать эффективность применения некоторых методов математической статистики для исследования строительных материалов.

В качестве объекта исследования взято сланцезольное вяжущее, так наз. кукермит, изготавливаемый путем помола мелкой фракции летучей золы эстонского сланца-кукерсита. При обычной температуре ( $20^{\circ}\text{C}$ ) кукермит твердеет значительно медленнее портландцемента, причем особенно медленно протекает его твердение в первые 3—4 дня. В течение этого периода он, кроме того, не обладает равномерностью изменения объема при твердении в среде с повышенной влажностью и особенно в воде. При более низкой температуре (от 0 до  $10^{\circ}$ ) твердение кукермита замедляется еще более. Так, при  $10^{\circ}$  он твердеет в течение 5—8, а при  $0^{\circ}$  — даже 10—15 дней.

Рассмотренный период медленного твердения кукермита часто оказывает решающее влияние на прочность и стойкость кукермитовых растворов и бетонов. Качество кукермита тем выше, чем короче период его медленного твердения.

Исследования также показали, что скорость твердения отдельных проб кукермита заметно различается, завися от физических свойств и химико-минералогического состава зол, применявшихся для его изготовления.

Учитывая вышеприведенное, анализировалась кинетика твердения кукермита в возрасте от 3 до 15 дней и влияние на этот процесс некоторых показателей химико-минералогического состава золы. Статистическим материалом служили данные испытания 24 различных проб кукермита. По каждой из них были определены шесть характеристик состава и (ежедневно) прочность растворных образцов на сжатие.

Математическая модель процесса определяется в виде полинома третьей степени от возраста с коэффициентами, линейно зависящими от параметров состава золы. Устанавливается статистическая точность модели. На основе модели решаются некоторые задачи оптимизации состава золы с учетом статистической достоверности модели. Экспериментальные работы проведены в Научно-исследовательской лаборатории строительных материалов Таллинского политехнического института, а расчеты по созданию математической модели на ЭЦВМ «Минск-2» — в вычислительном центре Института кибернетики АН ЭССР.

### 1. Методика эксперимента

А. Рациональный анализ золы. Химический состав определялся путем рационального химического анализа в соответствии с методикой, приведенной Э. Нагеровой [1] и Э. Пиксарвом [2]. Определялись следующие показатели химико-минералогического состава золы:

1)  $\text{CaO}$ , растворимая в 5%-ной борной кислоте; 2)  $\text{SiO}_2$ , растворимый в 3%-ной соляной кислоте; 3)  $\text{CaO}$ , растворимая в 3%-ной соляной кислоте; 4)  $\text{CaO}_{\text{своб}}$ ; 5) гипс-ангидрит; 6)  $\text{CO}_2$ .

Б. Гидравлическая активность. Гидравлическая активность кукуермита оценивалась по прочности на сжатие изготовленного из него раствора. Кукуермит приготавливался путем помола мелкой фракции летучей золы в лабораторной шаровой мельнице (продолжительность помола проб была постоянна). Из смеси кукуермита и вольского песка (1:3) приготавливался пластичный раствор и из него кубические образцы размером  $4 \times 4 \times 4$  см. Образцы твердели в насыщенной влагой среде при  $20^\circ$ . Прочность раствора на сжатие определялась ежедневно.

## 2. Основные характеристики статистического материала

Введем следующие обозначения:

$R_k$  — предел прочности раствора 1:3 (кукуермит : вольский песок) в возрасте  $k$  суток,  $кг/см^2$ ;

$x_1$  — содержание в кукуермите растворимой в борной кислоте  $CaO$ , %;

$x_2$  — содержание в кукуермите растворимого в 3%-ной соляной кислоте  $SiO_2$ , %;

$x_3$  — содержание в кукуермите растворимой в 3%-ной соляной кислоте  $CaO$ , %;

$x_4$  — содержание в кукуермите свободной  $CaO$ , %;

$x_5$  — содержание в кукуермите гипса, %;

$x_6$  — содержание в кукуермите  $CO_2$ , %.

В рассматриваемой серии испытаний вышеприведенные параметры имели следующие средние значения:

$\bar{x}_1 = 26,29$	$\bar{R}_3 = 9,33$	$\bar{R}_9 = 63,42$
$\bar{x}_2 = 10,93$	$\bar{R}_4 = 11,56$	$\bar{R}_{10} = 77,12$
$\bar{x}_3 = 8,46$	$\bar{R}_5 = 15,91$	$\bar{R}_{11} = 88,42$
$\bar{x}_4 = 13,63$	$\bar{R}_6 = 25,65$	$\bar{R}_{12} = 97,12$
$\bar{x}_5 = 5,67$	$\bar{R}_7 = 38,55$	$\bar{R}_{13} = 104,00$
$\bar{x}_6 = 1,51$	$\bar{R}_8 = 51,75$	$\bar{R}_{14} = 112,67$
		$\bar{R}_{15} = 121,25$

Отдельные значения параметров  $x_1 \dots x_6$  и соответствующие  $R_k$  колебались около этих средних значений. Пригодность данного статистического материала для выявления эффектов отдельных компонентов золы на ход изменения предельной прочности определяется в основном широтой изменения параметров  $x_i$  и взаимной зависимостью этих изменений. Для характеристики изменений параметров  $x_i$  приведем их стандартные отклонения  $s_{x_i}$  и матрицу коэффициентов корреляции  $r_{xx}$  в данной серии опытов:

$s_{x_1} = 1,34$	$r_{xx} =$	1	0,093	+0,443	+0,848	-0,389	+0,246
$s_{x_2} = 0,43$			1	+0,553	+0,077	-0,554	-0,524
$s_{x_3} = 0,46$				1	+0,452	-0,766	-0,497
$s_{x_4} = 1,05$					1	-0,452	+0,211
$s_{x_5} = 0,93$						1	+0,482
$s_{x_6} = 0,17$							1

По сравнению с априорной информацией о влиянии отдельных независимых переменных на  $R_k$  стандартные отклонения  $s_{x_i}$  невелики. Одновременно некоторые из параметров  $x_i$  заметно коррелированы между собой. Поэтому данная серия опытов не позволяет построить модель твердения, обладающую высокой достоверностью. Однако проведение экспериментов с заранее выбранными (например, на основе принципов планирования экспериментов Бокса-Вильсона [3]) составами кукуермита практически невозможно. Поскольку такое положение часто встречается при исследовании строительных материалов, представляет интерес, какие заключения и с какой достоверностью можно все же сделать на основании подобного статистического материала и каких специальных приемов это требует.

### 3. Разложение предельной прочности по полиномам Чебышева

Для каждого состава золы предельная прочность  $R_k$  образца в возрасте  $k$  суток является функцией  $k$ . В результате экспериментов нам известны 13 значений каждой такой функции. Естественно, что эти экспериментальные значения искажены влиянием случайных факторов. Графики функций  $R_k$  показывают (рис. 1), что в рассматриваемой области изменения  $k$  они могут быть приближены полиномами третьей степени от  $k$ . Поэтому воспользуемся нижеследующим приемом подавления экспериментальных ошибок определения значений  $R_k$  и конденсации информации о функциях  $R_k$ : вместо 13 значений  $R_k$  в качестве результата эксперимента по каждому составу берем четыре коэффициента полинома третьей степени, построенного методом наименьших квадратов по указанным 13 значениям  $R_k$ . Полученные коэффициенты, очевидно, более устойчивы относительно влияния случайных факторов, не зависящих от состава кукуермита, и одновременно почти полностью учитывают влияние состава кукуермита на кинетику его твердения в интервале времени от 3 до 15 суток.

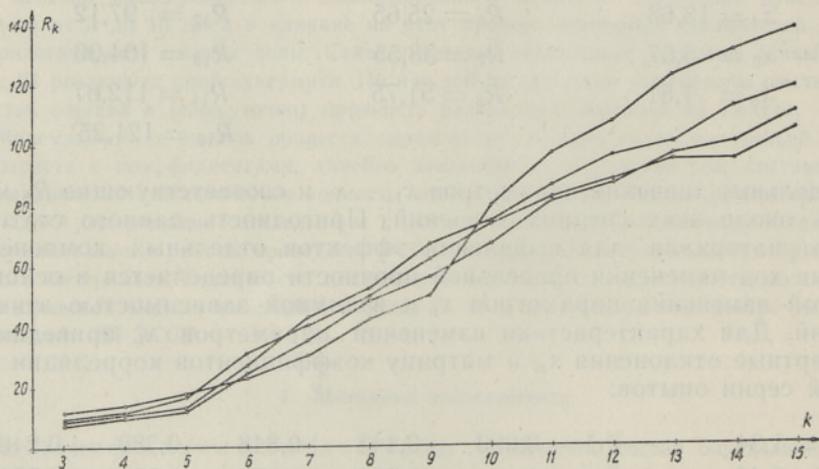


Рис. 1. Графики  $R_k$  для некоторых составов кукуермита.

Для исключения статистической зависимости определяемых коэффициентов от времени и для упрощения вычислений целесообразно найти кубические полиномы через разложение по ортогональным полиномам

Чебышева и вместо коэффициентов при степенях  $k$  оперировать коэффициентами при полиномах Чебышева.

Преобразованные к данному интервалу  $3 \leq k \leq 15$  первые полиномы Чебышева имеют вид:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 1, & \Psi_2 &= (k-9)^2 - 14, \\ \Psi_1 &= k-9, & \Psi_3 &= (k-9)^3 - 25(k-9). \end{aligned} \quad (3.1)$$

По известным формулам [4] получаем для каждого состава кукурмита разложение  $R_k$  в виде

$$R_k = A_0\Psi_0 + A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + A_3\Psi_3. \quad (3.2)$$

Вычисленные для всех 24 составов кукурмита коэффициенты  $A_0, A_1, A_2, A_3$  имели следующие средние значения и стандартные отклонения:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= 62,85 & s_{A_0} &= 4,70 \\ \bar{A}_1 &= 10,28 & s_{A_1} &= 1,02 \\ \bar{A}_2 &= 0,01796 & s_{A_2} &= 0,246 \\ \bar{A}_3 &= -0,09317 & s_{A_3} &= 0,0376. \end{aligned}$$

Рассчитана также матрица коэффициентов корреляции  $r_{AA}$  величин  $A_0, \dots, A_3$ :

$$r_{AA} = \begin{vmatrix} 1 & +0,714 & -0,226 & -0,021 \\ & 1 & +0,466 & -0,579 \\ & & 1 & -0,591 \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

Как видно, некоторые пары коэффициентов, как  $A_0$  и  $A_1, A_1$  и  $A_3, A_2$  и  $A_3$ , имеют значительную взаимную корреляцию. Это надо учитывать при оценке статистической точности  $R_k$ , так как последняя является линейной комбинацией величин  $A_0, \dots, A_3$ .

#### 4. Математическая модель кинетики твердения

Имея для каждого состава четыре коэффициента разложения предельной прочности по полиномам Чебышева, естественно попытаться связать изменения этих коэффициентов с изменениями состава кукурмита, т. е. с изменениями параметров  $x_1, \dots, x_6$ . Так как область изменения параметров  $x_1, \dots, x_6$  в данной серии опытов мала, то можно считать, что  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$  являются в этой области линейными функциями параметров

$$A_i = \beta_{0i} + \beta_{1i}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \beta_{6i}(x_6 - \bar{x}_6) \quad (i=0, 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

причем отклонения наблюдений  $A_i$  от этих выражений являются нормальными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями. Оценки  $b_{0i}, b_{1i}, \dots, b_{6i}$  коэффициентов уравнения (4.1) получаются в этом случае методом наименьших квадратов как решения соответствующих четырех систем нормальных уравнений [5]. Не вдаваясь в подробности вычислений, приводим лишь полученные таким путем уравнения:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 62,85 + 2,29(x_1 - \bar{x}_1) + 3,18(x_2 - \bar{x}_2) + 4,45(x_3 - \bar{x}_3) - \\
 &\quad - 4,98(x_4 - \bar{x}_4) + 2,27(x_5 - \bar{x}_5) + 3,45(x_6 - \bar{x}_6) \\
 A_1 &= 10,28 + 0,023(x_1 - \bar{x}_1) + 0,339(x_2 - \bar{x}_2) + 0,617(x_3 - \bar{x}_3) - \\
 &\quad - 0,525(x_4 - \bar{x}_4) + 0,692(x_5 - \bar{x}_5) + 2,305(x_6 - \bar{x}_6) \\
 A_2 &= 0,0180 - 0,117(x_1 - \bar{x}_1) - 0,101(x_2 - \bar{x}_2) - 0,131(x_3 - \bar{x}_3) + \\
 &\quad + 0,098(x_4 - \bar{x}_4) + 0,0013(x_5 - \bar{x}_5) + 0,709(x_6 - \bar{x}_6) \\
 A_3 &= -0,0932 + 0,00851(x_1 - \bar{x}_1) + 0,00875(x_2 - \bar{x}_2) - 0,00498(x_3 - \bar{x}_3) - \\
 &\quad - 0,00524(x_4 - \bar{x}_4) - 0,0231(x_5 - \bar{x}_5) - 0,0878(x_6 - \bar{x}_6).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Соответствующие этим регрессионным уравнениям множественные коэффициенты корреляции, характеризующие тесноту связи, равны при этом соответственно 0,716; 0,846; 0,832 и 0,891. Коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  таким образом, в большей мере связаны с параметрами  $x_1, \dots, x_6$ , чем  $A_0$ . Так как  $A_0$  не влияет на кинетику  $R_k$  ( $dR_k/dk$  не зависит от  $A_0$ ), то последнее обстоятельство указывает на тот факт, что неучтенные показатели состава кукуермита больше влияют на абсолютное значение, чем на кинетику  $R_k$ .

Подстановкой выражений  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$  и полиномов  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$  и  $\Psi_3$  в уравнение (3.2) получаем модель рассматриваемого процесса в виде кубического полинома от возраста образца  $k$ , коэффициенты которого линейно зависят от параметров  $x_1, \dots, x_6$  состава кукуермита. Модель в таком виде позволяет для любых комбинаций параметров состава кукуермита (не слишком отличающихся от их средних значений) получить наиболее вероятную функцию изменения  $R_k$  во времени.

Если в этой модели вынести отклонения  $x_i - \bar{x}_i$  за скобки, она преобразуется к виду

$$R_k = P_0(k) + P_1(k)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + P_6(k)(x_6 - \bar{x}_6), \tag{4.3}$$

где  $P_0(k), P_1(k), \dots, P_6(k)$  — кубические полиномы от  $k$  — следующие:

$$\begin{aligned}
 P_0(k) &= 18,51 - 10,35 k + 2,53 k^2 - 0,0932 k^3 \\
 P_1(k) &= -10,05 + 3,99 k + 0,35 k^2 + 0,0085 k^3 \\
 P_2(k) &= -11,03 + 4,06 k - 0,34 k^2 + 0,0088 k^3 \\
 P_3(k) &= -7,39 + 1,89 k + 0,03 k^2 - 0,0050 k^3 \\
 P_4(k) &= 8,94 - 3,43 k + 0,24 k^2 - 0,0052 k^3 \\
 P_5(k) &= 7,79 - 4,37 k + 0,63 k^2 - 0,0231 k^3 \\
 P_6(k) &= 74,44 - 29,60 k + 3,08 k^2 - 0,0878 k^3.
 \end{aligned}$$

$P_0(k)$  представляет  $R_k$  как функцию от  $k$  для средних значений параметров  $x_1, \dots, x_6$ , а  $P_1(k), \dots, P_6(k)$  являются функциями  $k$ , показывающими, насколько увеличивается  $R_k$  при увеличении соответственно  $x_1, \dots, x_6$  на одну единицу. График функции  $P_0(k)$  приведен на рис. 6, графики  $P_1(k), \dots, P_6(k)$  — на рис. 2.

Как видно из рис. 2, параметры  $x_1, x_2$  и  $x_3$  оказывают примерно одинаковое влияние на предел прочности: вначале в возрасте трех суток они уменьшают предел прочности, а после четырех суток увеличивают его. Параметры  $x_5$  и  $x_6$  зато имеют длительный период отрицательного влияния (до 7 и 10 суток соответственно), но потом и они увеличивают

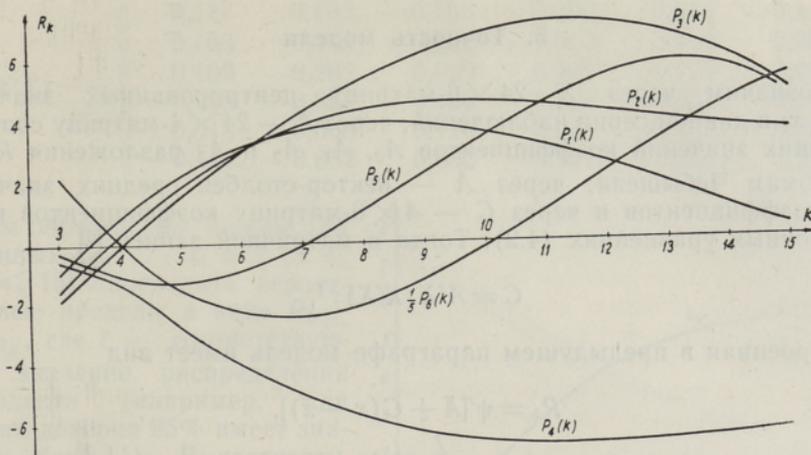


Рис. 2. Влияние отдельных компонентов кукуермита на предельную прочность образцов как функции времени.

прочность материала. Параметр  $x_4$  влияет на  $R_k$  все время отрицательно.

К непосредственному применению и интерпретации функций  $P_1(k)$ , ...,  $P_6(k)$  следует относиться осторожно — их статистическая достоверность довольно низка. В качестве примера на рис. 3 изображен 95%-ный доверительный интервал для  $P_1(k)$  влияния  $\text{CaO}$ , растворимой в борной кислоте. Как видно из рисунка, положительное влияние, например,  $x_1$  на  $R_k$  с уровнем достоверности 95% можно утверждать только в возрастном интервале от 4 до 10 суток, хотя ожидаемое значение  $P_1(k)$  остается положительным и после 10 суток.

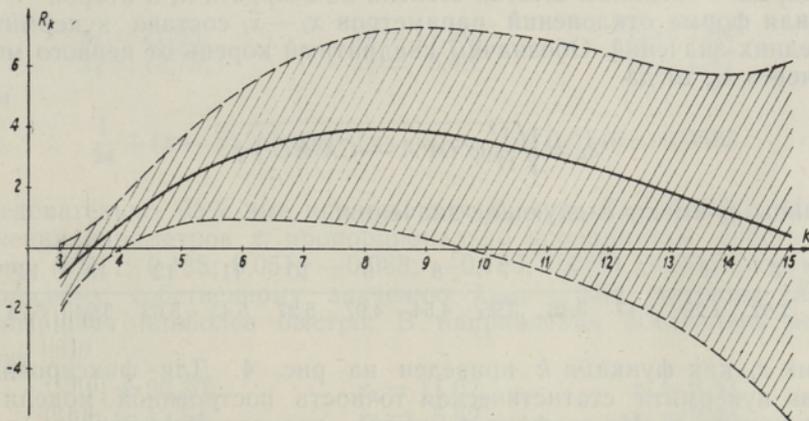


Рис. 3. График влияния параметра  $x_1$  на  $R_k$  вместе с 95%-ными вероятностными пределами.

Точность коэффициентов  $P_i(k)$  здесь подробно не рассматривается, но в следующем параграфе будет установлена точность нашей модели для любых изменений ее параметров.

## 5. Точность модели

Обозначим через  $X$   $24 \times 6$ -матрицу центрированных значений  $x_1, \dots, x_6$  в данной серии наблюдений; через  $A$  —  $24 \times 4$ -матрицу соответствующих значений коэффициентов  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$  разложения  $R_k$  по полиномам Чебышева; через  $\bar{A}$  — вектор-столбец средних значений этих коэффициентов и через  $C$  —  $4 \times 6$ -матрицу коэффициентов в регрессионных уравнениях (4.2). Тогда в матричной записи [5]

$$C = A'X(X'X)^{-1}, \quad (5.1)$$

и построенная в предыдущем параграфе модель имеет вид

$$R_k = \psi[\bar{A} + C(x - \bar{x})], \quad (5.2)$$

где  $\psi$  — вектор-столбец полиномов (3.1).

Из (5.1) и (5.2) видно, что при фиксированных  $k$  и  $x_1, \dots, x_6$  определенное нашей моделью значение  $R_k$  является линейной функцией вычисленных по наблюдениям величин  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$ . Так как по нашим предположениям последние распределены нормально, то и  $R_k$  является нормально распределенной величиной. Математическое ожидание величины  $R_k$  при некоторых  $k$  и  $x_1, \dots, x_6$  совпадает с действительным значением  $R_k$  для этих  $k$  и  $x_1, \dots, x_6$ , а его дисперсия  $s_{R_k}^2$  оценивается на основании 17 степеней свободы как дисперсия линейной комбинации коэффициентов многомерного регрессионного уравнения выражением [6]

$$s_{R_k}^2 = \frac{1}{17} \psi'(A'A - CX'XC')\psi \left[ \frac{1}{24} + (x - \bar{x})'(X'X)^{-1}(x - \bar{x}) \right]. \quad (5.3)$$

Это выражение является произведением двух множителей, первый из которых — полином шестой степени от возраста  $k$ , а второй — квадратичная форма отклонений параметров  $x_i - \bar{x}_i$  состава кукуермита от их средних значений. Обозначим квадратный корень от первого множителя через  $s_k$ , тогда

$$s_k = \sqrt{\frac{1}{17} \psi'(A'A - CX'XC')\psi}. \quad (5.4)$$

Величины  $s_k$  имеют следующие значения:

$k$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s_k$	1,92	1,22	2,17	3,16	3,95	4,54	4,97	5,27	5,45	5,62	5,94	6,74	8,36

График  $s_k$  как функция  $k$  приведен на рис. 4. Для фиксированного состава кукуермита статистическая точность построенной модели пропорциональна  $s_k$ . Из графика  $s_k$  видно, что эта погрешность внутри интервала  $3 < k < 15$  возрастает, причем на концах интервала наблюдается особенно резкое повышение погрешности (так наз. краевой эффект). На рис. 4 приведен также график отношения  $10s_k/\bar{R}_k$ , которое пропорционально относительной погрешности модели.

Матрица квадратичной формы, определяющей изменение точности модели в зависимости от отклонений  $x_i - \bar{x}_i$ , имеет следующие элементы:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,117 & 0,103 & -0,109 & -0,098 & 0,013 & -0,141 \\ 0,103 & 0,492 & -0,202 & -0,063 & 0,068 & 0,082 \\ 0,109 & -0,202 & 0,729 & 0,000 & 0,110 & 0,630 \\ -0,098 & -0,063 & 0,000 & 0,167 & 0,031 & -0,187 \\ 0,013 & 0,068 & 0,110 & 0,031 & 0,154 & -0,226 \\ -0,141 & 0,082 & 0,630 & -0,187 & -0,226 & 3,472 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы можем для заданных  $x_1, \dots, x_6$  и  $k$  ( $3 \leq k \leq 15$ ) определить вероятностные пределы в виде  $R_k \pm \pm ts_{R_k}$ , где  $t$  — соответствующее значение распределения Стьюдента (например, для уровня доверия 95% имеет значение  $t=2,11$ ). В частности, для среднего состава кукурмита  $x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_6 = \bar{x}_6$  эти вероятностные пределы будут  $R_k \pm 0,431s_k$ . Соответствующая этим средним значениям доверительная полоса  $R_k$  изображена на рис. 6.

При удалении от точки средних  $x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_6 = \bar{x}_6$   $s_{R_k}$  увеличивается. Но скорость увеличения  $s_{R_k}$  зависит от соотношения, в котором параметры  $x_i$  изменяются. Наиболее благоприятно в этом смысле изменение параметров  $x_i$  пропорционально вектору  $(0,744; 0,335; -0,521; 0,154; -0,192; -0,044)$ , который является собственным вектором матрицы  $(X'X)^{-1}$ , соответствующим наименьшему собственному значению  $\lambda_{\min} = 0,0146$ . На расстоянии одной единицы от точки средних в направлении этого вектора, т. е. при

$$\begin{array}{lll} x_1 = 27,03, & x_2 = 11,26, & x_3 = 7,94 \\ x_4 = 13,78, & x_5 = 5,48, & x_6 = 1,47 \end{array}$$

имеем

$$\frac{1}{24} + (x - \bar{x})'(X'X)^{-1}(x - \bar{x}) = \frac{1}{24} + 0,0146 = 0,0563$$

и, следовательно, 95%-ные пределы для  $R_k$  суть  $R_k \pm 0,502s_k$ . Но при изменении параметров  $x_i$  пропорционально координатам собственного вектора  $(0,011; 0,138; 0,051; -0,088; -0,150; 0,974)$ , соответствующего наибольшему собственному значению  $\lambda_{\max} = 3,64$  матрицы  $(X'X)^{-1}$ ,  $s_{R_k}$  возрастет наиболее быстро. В направлении последнего вектора в точке

$$\begin{array}{lll} x_1 = 26,30, & x_2 = 11,07, & x_3 = 8,51 \\ x_4 = 13,54, & x_5 = 5,52, & x_6 = 2,48, \end{array}$$

которая также находится от точки средних на расстоянии одной единицы, будем иметь

$$\frac{1}{24} + (x - \bar{x})'(X'X)^{-1}(x - \bar{x}) = \frac{1}{24} + 3,64 = 3,68$$

и соответствующие вероятностные пределы суть  $R_k \pm 4,05s_k$ , т. е. дове-

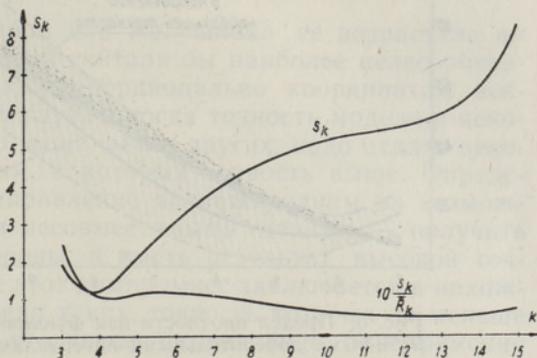


Рис. 4. Графики множителей абсолютной и относительной точности модели, зависящие от возраста.

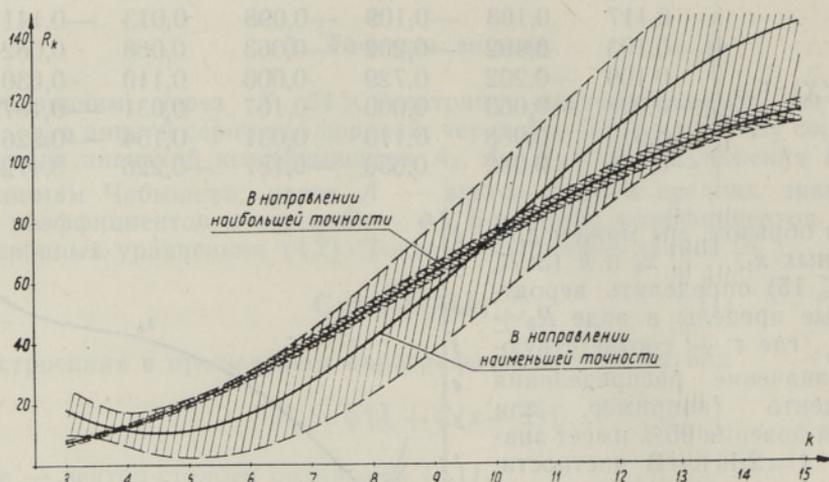


Рис. 5. Предел прочности как функция времени по модели вместе с 95%-ными доверительными интервалами для составов кукуермита на расстоянии одной единицы от точки средних в направлениях наибольшей и наименьшей точности.

рительный интервал в восемь раз шире, чем для первой точки. Графики обоих рассмотренных здесь доверительных интервалов изображены на рис. 5. При продвижении по этим двум крайним направлениям на расстояние двух единиц доверительный интервал  $R_k$  будет для второго направления уже в 12 раз шире, чем для первого.

Подобная неодинаковая точность математической модели в различных направлениях наблюдается всегда при использовании статистического материала с коррелированными «независимыми» переменными. При исследовании свойств строительных материалов коррелированность параметров химико-минералогического состава, показателей гранулометрического распределения частиц и т. п. обычно неизбежна. Эта коррелированность отражает естественные корреляционные зависимости между параметрами. Соответствующие математические модели обладают большей точностью в таких направлениях, где эти корреляционные зависимости меньше нарушаются. Но именно в таких направлениях параметры легче управляемы. Поэтому экспериментальный материал с коррелированными «независимыми» переменными может также служить основой для построения математических моделей. Однако для таких моделей особенно важно определение зависимости их статистической точности от значений входящих в них переменных и учет этой точности при использовании моделей. В следующем параграфе мы покажем на двух примерах применительно к рассмотренной выше модели твердения вяжущего из сланцевой золы, как можно учесть точность регрессионной модели при постановке и решении проблем оптимизации.

## 6. Решение двух задач оптимизации на основании математической модели с учетом ее точности

Первую задачу формулируем следующим образом:

*в каком отношении следует выбирать приращеня  $x_i - \bar{x}_i$  параметров состава кукуермита, чтобы ожидаемый предел прочности образцов в возрасте семи суток  $R_7$  был максимальным при условии, чтобы оценка дисперсии этой прочности  $s_{R_7}^2$  равнялась заданной величине?*

Сделаем несколько замечаний по поводу такой формулировки задач оптимизации. Направлением, в котором  $R_7$  быстрее всего возрастает, является направление градиента  $R_7$ , т. е. направление вектора, координаты которого суть  $P_1(7), \dots, P_6(7)$ . Если этот вектор обозначить через  $b$ , то в данном случае

$$b = (3,77; 3,87; 4,31; -5,12; -0,101; -11,93).$$

Если бы наша модель была точной или же ошибка ее возрастала во всех направлениях одинаково, то мы считали бы наиболее целесообразным изменение разностей  $x_i - \bar{x}_i$  пропорционально координатам вектора  $b$ . Однако ясно, что в нашем случае, когда точность модели в некоторых направлениях существенно выше, чем в других, надо отдать некоторое предпочтение направлениям, в которых точность выше. Определенное поставленной задачей направление является одним из возможных компромиссов между двумя несовместимыми целями — получить хороший результат, с одной стороны, и иметь результат высокой точности — с другой. В нашей задаче этот компромисс заключается в нахождении наилучшего результата среди таких, точность которых не меньше заданной. Нетрудно проверить, что такое направление одновременно максимизирует фидуциальную вероятность получения положительного приращения для оптимизируемой величины ( $R_7$ ) и что в этом направлении относительная погрешность приращения минимальна.

Решение поставленной задачи получается методом Лагранжа. Приравняв к нулю частные производные по  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) от функции  $R_7 - \lambda s_{R_7}^2$  и решая полученную систему линейных уравнений, определяем искомый вектор изменения приращений до постоянного множителя. После нормирования этот вектор имеет следующие координаты:

$$c = (0,267; 0,339; 0,463; -0,119; -0,743; -0,175).$$

Нахождением вектора  $c$  поставленная задача решена. С каким множителем прибавить координаты вектора  $c$  к средним значениям параметров состава кукермита, можно определить или по заданной предельной точности, или из других соображений. Для получения конкретного результата берем этот множитель равным двум, т. е. по направлению вектора  $c$  продвинемся на расстояние двух единиц. Параметры состава кукермита получают в этом случае значения:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 26,82, & x_2 = 11,61, & x_3 = 9,39 \\ x_4 = 13,39, & x_5 = 4,18, & x_6 = 1,16. \end{array} \quad (I)$$

В этой точке  $R_7 = 52,4 \pm 5,0$  (с 95%-ными пределами). Для средних значений параметров  $x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_6 = \bar{x}_6$  имеем  $R_7 = 38,4 \pm 1,7$ , так что новый состав действительно заметно лучше и  $R_7$  при этом определится достаточно точно.

Если бы мы не учитывали неодинаковую точность модели и попытались продвинуться по градиенту  $b$  величины  $R_7$ , то продвижение на две единицы оказалось бы невозможным, так как  $x_6$  принимал бы тогда отрицательное значение. Если же продвинуться по вектору  $b$  на расстояние одной единицы, то мы попали бы в точку

$$\begin{array}{lll} x_1 = 26,54, & x_2 = 11,19, & x_3 = 8,75 \\ x_4 = 13,28, & x_5 = 5,66, & x_6 = 0,70, \end{array} \quad (II)$$

где  $R_7 = 53,3 \pm 17,1$ . Хотя здесь  $R_7$  больше, чем в точке (I), его нижний

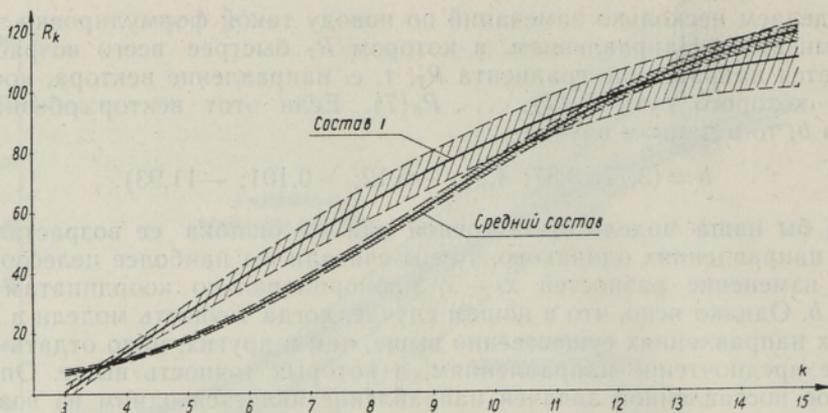


Рис. 6. Предел прочности  $R_k$  как функции возраста  $k$  вместе с 95%-ным доверительным интервалом для среднего состава кукуермита ( $P_0(k)$ ) и для состава (I).

предел меньше даже нижнего предела в точке средних. Кроме того, применение модели для точки (II) весьма рискованно, так как  $x_6$  в этой точке отличается от  $\bar{x}_6$  почти в пять раз больше, чем его стандартное отклонение в наших опытах.

Хотя найденным составом кукуермита (I) увеличение прочности в возрасте семи суток решено довольно успешно, надо знать, каким будет ход изменений  $R_7$  для этого состава во всем интервале  $3 \leq k \leq 15$ . Соответствующий график  $R_k$  вместе с его доверительным интервалом приведен на рис. 6. Оказывается, что этот состав практического интереса не представляет — за счет максимизации  $R_7$  значения  $R_k$  в концах рассматриваемого интервала стали меньше даже тех  $R_k$ , которые соответствуют среднему составу кукуермита.

Для получения более практического результата сформулируем новую задачу оптимизации иначе:

*для какого состава золы предел прочности в возрасте 14 суток будет максимальным при условии, что прочность в возрасте четырех суток равна 13 и дисперсия  $s_{14}^2$  остается меньше заданной величины?*

Такой формулировкой гарантируется в начале рассматриваемого интервала времени для  $R_k$  несколько большее значение, чем при средних значениях  $x_i$  (было  $\bar{R}_4 = 11,56$ ), основное увеличение  $R_k$  относится к концу интервала, и от результата требуется заданная точность.

Функцией Лагранжа для второй задачи является  $R_{14} + \lambda R_4 + \mu s_{R_{14}}^2$ . Решение задачи получается в виде

$$x_i - \bar{x}_i = p_i + uq_i,$$

где векторы  $p = (p_1, \dots, p_6)$  и  $q = (q_1, \dots, q_6)$  имеют координаты:

$$p = (0,509; 0,210; 0,339; 0,135; -0,835; -0,096)$$

$$q = (-88,2; -6,5; -21,2; -126,7; 69,4; 4,4),$$

а множитель  $u$  определяется на основании заданной точности. Для

сравнения оптимизации в сформулированном здесь смысле с оптимизацией в смысле первой задачи определяем  $u$  из условия, чтобы расстояние от точки  $(x_1, \dots, x_6)$  до точки средних и здесь равнялось двум. Тогда  $u = 0,0152$  и

$$\begin{array}{lll} x_1 = 25,45, & x_2 = 11,05, & x_3 = 8,47 \\ x_4 = 11,83, & x_5 = 5,98, & x_6 = 1,53. \end{array} \quad (\text{III})$$

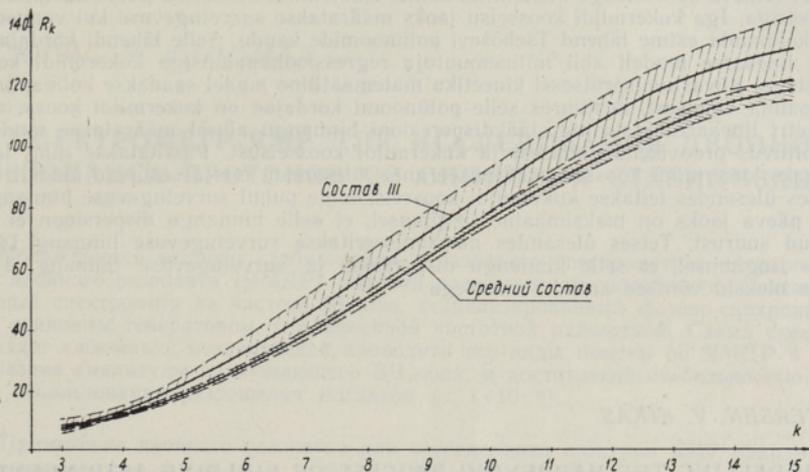


Рис. 7. Предел прочности с 95%-ными доверительными интервалами для среднего состава и состава III.

Соответствующая такому составу функция  $R_k$  вместе со своим доверительным интервалом  $R_k \pm 1,32 s_k$  изображена на рис. 7.

Повышение предела прочности по всему интервалу возраста  $3 \leq k \leq 15$ , полученное последним составом кукуермита, уже представляет и практический интерес.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нагерова Э., Тр. Совещ. заводских лабораторий цементной пром-сти, М., 1945, с. 81—82.
2. Пиксарв Э., О составе, процессе твердения и вяжущих свойствах мелких фракций летучей золы пылевидного сжигания сланца-кукерсита, Автореф. дисс. канд. техн. наук, Таллин, 1965.
3. Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, М., 1965.
4. Митропольский А. К., Техника статистических вычислений, М., 1961.
5. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, М., 1958.
6. Williams E. J., Regression Analysis, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1959.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР  
Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию  
1/III 1966

I. PETERSEN, V. KIKAS

### EHITUS-SIDEAINETE KÕVASTUMISPROTSESSI MODELLEERIMINE MATEMAATILISE STATISTIKA MEETODITEGA

Matemaatilise statistika meetoditega uuritakse põlevkivituhk-sideaine, nn kukermiidi kõvastumiskineetikat sõltuvuses tema keemilis-mineraloogilisest koosseisust. Statistilise analüüsi lähtematerjaliks on katsekehade survetugevuse piirväärtused vanuses 3 kuni 15 päeva 24 erineva koosseisuga kukermiidi kohta. Kukermiidi koosseisu iseloomustatakse kuue parameetriga. Iga kukermiidi koosseisu jaoks määratakse survetugevuse kui vanuse funktsiooni kolmanda astme lähend Tšebõševi polünoomide kaudu. Selle lähendi kordajad seostatakse lineaarse mudeli abil mitmemuutuva regressioonanalüüsiga kukermiidi koosseisu muutustega. Kõvastumisprotsessi kineetika matemaatiline mudel saadakse kolmanda astme polünoomina vanusest, kusjuures selle polünoomi kordajad on kukermiidi koosseisu kuue parameetri lineaarfunktsioonid. Jääkdispersiooni hinnangu alusel määratakse mudeli täpsuse sõltuvus proovikeha vanusest ja kukermiidi koosseisust. Püstitatakse ning lahendatakse kaks kukermiidi koosseisu optimeerimise ülesannet, mis arvestavad mudeli täpsust. Esimeses ülesandes leitakse kukermiidi koosseis, mille puhul survetugevuse hinnang seitsmenda päeva jaoks on maksimaalne tingimusel, et selle hinnangu dispersioon ei ületaks etteantud suurust. Teises ülesandes maksimiseeritakse survetugevuse hinnang 14 päeva vanuses tingimusel, et selle hinnangu dispersioon ja survetugevuse hinnang 4 päeva vanuses oleksid võrdsed antud suurustega.

I. PETERSEN, V. KIKAS

### MODELLING THE HARDENING PROCESS OF BUILDING ASTRINGENTS BY METHODS OF MATHEMATICAL STATISTICS

The methods of mathematical statistics are used for investigating the process of hardening of oil shale ash cement, Kukermite, depending on the chemical and mineralogical composition. The compressive strength of mortar specimens made with 24 compositions of ash and determined at the age of 3 to 15 days serves as the basis for the statistical analysis. The composition of Kukermite is characterized by six parameters. For each composition of Kukermite the rate of rise in compressive strength is determined, using the orthogonal polynomials of Chebyshev up to the third power.

Thus the mathematical model of the rate of hardening is obtained in the form of cubic polynomial, the coefficients of which are linear functions of the composition of Kukermite.

Two problems of determining the optimal composition of Kukermite have been formulated and solved. In the first problem the optimal composition of ash giving the maximum strength at the age of 7 days is determined on the condition that the dispersion is less than a given constant. In the second problem the ultimate strength at the age of 14 days is considered on the conditions of given dispersion and given strength at the age of 4 days.