EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.1.06

И. КЕЙС

ОБ ЭКОНОМИИ ТОПЛИВА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЛОКОМОТИВОВ

1. Для движения центра масс тяжелого состава, приводимого в действие касательной силой машины F_1 и бустера F_2 в отсутствие буксования и заклинивания, при скорости состава v, ограниченной сверху вдоль пути s положительной и гладкой функцией $v^*(s)$, можно составить (согласно сведениям из [1]) следующую систему уравнений:

$$m\,dv/dt = -v\,dm_0/dt + \xi[\eta(F_1+F_2)+(\eta-1)F_3] + \zeta B + G + S \tag{1.0}$$

$$ds/dt = v. \tag{1.1}$$

Здесь $m = m_0 + m_1 + IR^{-2}$; m_0 — масса тендера; m_1 — масса состава без тендера; I — полярный момент инерции вращающихся частей; R — радиус ведущих колес локомотива; F_1, F_2 — касательные силы тяги локомотива и бустера, исчисленные в $\kappa\Gamma$, при открытом регуляторе $0 < \varrho \leqslant 1$; F_3 — касательная сила тяги локомотива при дрифтинге ($\varrho = 0$).

$$\begin{aligned} F_1 &= 270(1-\varepsilon_0)z_1 v^{-1} f_1^{-1}(v, z_1) \\ F_2 &= 270\varepsilon_1 z_1 v^{-1} f_2^{-1}(v), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где функция $f_i(v, z_1)$ $(i = 1, 2)$ есть расход пара на одну лошадиную силу в час [1], соответственно для локомотива и бустера; ε_0 — доля от единицы количества машинного пара, производимого со скоростью z_1, и направляемая в бустер, тогда как коэффициент использования пара в бустере $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+d)^{-1}$, где постоянная $d \subset [0{,}6;\ 1]$.

Согласно предположению об отсутствии буксования и заклинивания должны выполняться условия

$$\begin{aligned} F_1 &\leqslant 1000\psi_1 P_1 (1+\mu)^{-1} \\ F_2 &\leqslant 1000\psi_2 P_2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где μ — коэффициент неравномерности касательной силы тяги; P_1, P_2 — сцепной вес в тоннах локомотива и бустера, причем для P_2 (госласно [1], стр. 109) имеем значение

$$P_2 = \begin{cases} k_p^0\, m_0 g \\ k_p^1\, P_1, \end{cases}$$

где k_p^0, k_p^1 — известные постоянные.

Смысл и значение величины ψ_1 рассматриваются в дальнейшем, между тем как постоянная $\psi_2 \subset [4^{-1}; 2{,}9^{-1}]$.

Общая тормозная сила тормозов одинакового устройства поезда B равна

$$-(n_1+n_2)K(K+a_1)(v+b_1)(K+a_2)^{-1}(v+b_2)^{-1},$$

где n_1, n_2 — число тормозных колодок в локомотиве и вагонах; K — нажатие на одну тормозную колодку; a_i, b_i $(i=\overline{1,2})$ — известные постоянные.

Для B имеем аналогично (1.3) ограничение

$$-B \leqslant \psi_3(d_1P+d_2Q),$$

в котором d_1P, d_2Q — доля веса P локомотива и веса Q вагонов, приходящиеся на тормозные оси; ψ_3 — некоторый коэффициент.

Функции ξ, η и ζ равны выражениям

$$\xi = \operatorname{sign}(v^*-v)$$

$$\eta = \operatorname{Sg}[\varrho+\varrho_0(v-v^*)\,|v-v^*|^{-1}] \qquad \operatorname{Sg}x=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$$\zeta = \operatorname{Sg}(v-v^*)$$

(ϱ_0 — пассивное деление на шкале регулятора).

При вычислении силы сопротивления от уклона пути G приняты во внимание следующие соображения. Предполагается, что профиль пути аппроксимирован ломаными с вершинами S_k, соответствующими длинам пути от начала отсчета, в которых происходит смена наклона пути. Если считать, что конечная точка состава имеет координату s, то для состава длины l можно получить следующее выражение V потенциала сил тяжести, приложенных к составу:

$$V(s)=\begin{cases}\Gamma(y_{1k}+\nu_k s), & S_k\leqslant s\leqslant S_{k+1}-l\\ \Gamma(\mu_0+\mu_1 s+\mu_2 s^2), & S_{k+1}-l<s<S_{k+1}\\ \Gamma(y_{1k+1}+\nu_{k+1}s), & S_{k+1}\leqslant s\leqslant S_{k+2}-l.\end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Gamma &= 1000(P+Q)\\
y_k &= y(S_k)\\
y_{1k} &= y_k+(2^{-1}l-S_k)\nu_k\\
y_{1k+1} &= y_k+(S_{k+1}-S_k)\nu_k+(2^{-1}l-S_{k+1})\nu_{k+1}\\
u_{0k} &= ly_k+2^{-1}(l-S_{k+1})^2\nu_{k+1}-S^2_{k+1}\,\nu_k\\
u_{1k} &= (l-S_{k+1})\nu_{k+1}+S_{k+1}\nu_k\\
u_{2k} &= 2^{-1}(\nu_{k+1}-\nu_k)\\
\nu_k &= \sin\alpha_k
\end{aligned} \tag{1.5}$$

(α_k — угол между подъемом, начинающимся в точке S_k, и горизонталью, отсчитываемый от последней.)

Потенциалу $V(s)$, определенному равенством (1.4), соответствует сила сопротивления от уклона пути G:

$$G(s)=\begin{cases}-\Gamma\nu_k, & S_k\leqslant s\leqslant S_{k+1}-l\\ -\Gamma(u_{1k}+2u_{2k}s), & S_{k+1}-l<s<S_{k+1}\\ -\Gamma\nu_{k+1}, & S_{k+1}\leqslant s\leqslant S_{k+2}-l.\end{cases}\qquad(1.6)$$

Ломаный рельеф можно аппроксимировать прямыми на линейных участках пути и дугами окружностей, сопряженных к прямым в точках смены наклона и радиусов R_k, характерных для рельефа. Высота конца состава над уровнем горизонта согласно такой аппроксимации равна:

$$y(\sigma)=\begin{cases}y_k+(\sigma-S_k)\nu_k, \quad \sigma\leqslant S_{k+1}-\sigma_k\\ y_{k+1}+y_{1k+1}+Nl(\alpha_k-\alpha_{k+1})^{-1}\cos[\sigma-\sigma_k)R_k^{-1}+\alpha_k\operatorname{sign}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)]\\ S_{k+1}-\sigma_k<\sigma\leqslant S_{k+1}+|\alpha_{k+1}-\alpha_k|R_k-\sigma_k\\ y_{k+1}+(\sigma-S_{k+1})\nu_{k+1},\ \sigma>S_{k+1}+|\alpha_{k+1}-\alpha_k|R_k-\sigma_k,\end{cases}\qquad(1.7)$$

где
$$N_k=|\alpha_{k+1}-\alpha_k|R_kl^{-1}$$
$$\sigma_k=N_kl\,|\alpha_{k+1}-\alpha_k|^{-1}\operatorname{tg}|2^{-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)|$$
$$y_{1k+1}=N_kl(\nu_{k+1}-\nu_k)|\alpha_{k+1}-\alpha_k|^{-1}|\sin(\alpha_{k+1}-\alpha_k)|^{-1},$$

а другие обозначения сохраняют смысл, указанный в формулах (1.5).

Учитывая это обстоятельство, будем считать, что непрерывная функция $G(s)$, представимая формулами (1.6), всегда может быть заменена весьма близкой к ней функцией $G_1(s)$, обладающей непрерывной производной по s.

Присутствие в уравнении (1.0) членов, соответствующих силам инерции вращающихся частей локомотива, отмечено членом с коэффициентом I и одним из слагаемых в S. Действительно, живую силу, соответствующую вращательному движению, можно определить формулой

$$T(\varphi,\varphi')=[I+I_1(\varphi)]2^{-1}\varphi'^2=[I+I_1(\varphi)]v^2/2R^2$$

$$T'=vR^{-2}(Iv'+v^2R^{-1}\,\partial I_1/\partial\varphi)=-I_0v.$$

Злесь φ — угол поворота вращающихся частей; I — постоянный член в разложении Фурье соответствующего коэффициента; член $I_1(\varphi)$ дает периодически колеблющуюся относительно нуля составляющую сил инерции, модуль которой уменьшается при наличии симметричных вращающихся устройств, движущихся со сдвигом по фазе; I_0 — сила инерции вращающихся частей локомотива.

Укажем значение последнего члена в уравнении (1.0), представляющего собой главный вектор прочих сил внутреннего и внешнего сопротивления движению, который зависит от фазовых координат s, v, а также от различных параметров системы и внешней среды. Известно [1], что упомянутая совокупность сил равна сумме

$$S = (c, W),$$

где вектор $W = (w_1, w_2 \dots w_8)$, а вектор $c = (1, 1, \dots 1)$.

С принятой степенью точности укажем выражение для компонентов W. Сопротивление шейки $W_1 = -(P+Q)dD^{-1}k_1(v)$, $k_1(v) = k_{11} + k_{12}(v - k_{10})^{\frac{1}{2}}$. Здесь, как и всюду в дальнейшем, k_{ij} — известные положительные постоянные; $P+Q$ — число тонн в составе; d и D — диаметры шейки и ведущего колеса. Сопротивление перекатыванию $W_2 = -(P + \nu Q)k_2(v)$, $\nu = RR_\nu^{-1}$, $k_2(v) = k_{02}R^{-1}[1 + k_{21}(v - k_{20})][1 + k_{22}(v - k_{20})]^{-1}$. R_ν — радиус колеса вагона. Сопротивление от ударов и колебаний $W_3 = -(P+Q)l_1(k_{31}v + k_{32}v^2)$, l_1 — длина рельса. Сопротивление скольжения $W_4' = -(P+Q)[k_{40}' + (k_{41}' + k_{42}'v_1)\exp(-k_{43}v_1)]$, где v_1 — скорость проскальзывания. Полагая $v_1 = \varepsilon_2 v$ (ε_2 — мало́), можно аппроксимировать выражение W_4' формулой

$$W_4 = -(P+Q)\,(k_{40} - \varepsilon_1 k_{41} v).$$

Сопротивление от бокового давления ветра

$$W_5 = -W_0(k_{50} - \varepsilon_2 k_{51} v),$$

где давление W_0, включающее центробежную силу, равно

$$(P+Q)\,(gR_j)^{-1}\,(v^2 - v_j^2) + 2^{-1}\,\varrho_0\, C_p F_s w^2\,(\bar{w}_0^0,\ \bar{\eta}_j^0(s))^2,\ \mathrm{Sign}(\bar{w}, \bar{\eta}_j).$$

Здесь обозначены: v_j — характерная скорость на плоском повороте между точками S_j и S_{j+1}; R_j — радиус кривизны на повороте; ϱ_0 — плотность воздушной среды; C_p — аэродинамический коэффициент; w, $\bar{w}_0^0$ — модуль и единичный вектор скорости ветра; η_j^0 — единичный вектор внешней нормали к линии движения.

Сопротивление от кривой

$$W_6 = -(P+Q)\,[k_{60} - k_{61}v(e_1^2 + e_2^2)^{1/2}2^{-1}R_j^{-1/2}],$$

$$S_j \leqslant s \leqslant S_{j+1}$$

(здесь e_1, e_2 — ширина и длина вагона).

Сила полного воздушного сопротивления (см. [1], стр. 198—211)

$$W_7 = -M(\mathrm{Re})\,\varrho_0\,2^{-1}\,[v - w(\bar{v}, \bar{w}^0)]^2,$$

где M — коэффициент, определенным образом зависящий от геометрии состава и числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \varrho_0 l\,[v - w(\bar{v}^0, \bar{w}^0)]\,\mu^{-1}$; μ — вязкость; l — характерная длина локомотива; v^0 — единичный вектор скорости центра масс состава.

Дополнительное сопротивление, вызываемое устройствами для освещения пассажирских вагонов и снабжения их кондиционированным воздухом, $W_8 = -k_{18}W_0v^{-1}$ (W_0 — потребляемая мощность).

Естественно, что сопротивления W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6 зависят от температуры, влажности и чистоты от примесей внешней среды, которые в свою очередь зависят от s и t. Если предполагать, что время прохождения куска оптимальной траектории, соответствующей отрезку S_k, S_{k+1}, отличается от расходуемого на практике времени на величину малую по сравнению со временем изменения функций W_i $(i = \overline{1, 6})$ на отрезках S_k, S_{k+1}, то можно положить $k_{ij} = k_{ij}(s)$ $(i = \overline{1, 6};\ j = \overline{0, 2})$.

Применяя то же соображение к вычислению сопротивлений W_7 и W_8, близких к прогнозируемым соответствующими устройствами, получим для S с принятой в [1] точностью формулу

$$S = A_{-1}v^{-1} + A_0 + A_1 v + A_2 v^2, \tag{1.8}$$

в которой $A_k = A_k(s)$ — некоторые функции s или же экспериментальные постоянные.

Вернемся к ограничению (1.3). Согласно ([1], стр. 79, 81) будем считать, что коэффициент сцепления ψ_1 на кусках S_k, S_{k+1} можно аппроксимировать следующим произведением функций:

$$\psi_1(v, s, t) = \begin{cases} \varphi_0(v)\varphi_k(t), & S_k + lN_k < s < S_{k+1} - lN_k \\ \varphi_{k,\,k+1}(v)\varphi_k(t), & S_{k+1} - lN_k < s < S_{k+1} + lN_k \\ \varphi_0(v)\varphi_{k+1}(t), & S_{k+1} + lN_k < s < S_{k+1} - lN_k, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $\varphi_0(v) = \varphi_{01}(1 + \varphi_{02} v)^{-1} \simeq \varphi_{01}(1 - \varphi_{02} v)$, φ_{01} и φ_{02} — постоянные, из которых вторая много меньше первой; $\varphi_{k,\,k+1} = 1 + v^2 R_{k+1}^{-1} g^{-1}\,\mathrm{sign}\,(\bar{g}, \bar{\mathrm{v}}_k)$, причем $\bar{g}$ и $\bar{\mathrm{v}}_{k+1}$ — векторы вертикали и внутренней нормали профиля пути в точке S_{k+1}. Предполагается также, что φ_k определены в оставшихся промежутках так, чтобы значения $\psi_1(v, s, t)$ были в них достаточно гладкими. Если допустить, что $\partial\psi_1/\partial t \ll (S_{k+1} - S_k)\ (v_1 - v_e)^{-1}$, где v_e и v_1 — оптимальная и характерная скорость движения, то можно аппроксимировать функцию $\psi_1(v, s, t)$ функцией $\psi_1^1\ (v, s)$. (В дальнейшем верхний индекс всюду опущен.) Вообще говоря, теоретическое и экспериментальное представление о функции $\psi_1(v, s, t)$, играющей важную роль в рассматриваемом вопросе, неполно и ограничено; в связи с этим представляет интерес проблема прогнозирования функции $\psi_1(v, s, t)$ по ее значениям, замеренным ранее в точках $s - m\Delta s$, $t - n\Delta t$ $(m, n$ — целые числа), а также вопрос в том, не существует ли прямой связи между распределением энергии по частотам звуковых и ультразвуковых колебаний, возбуждаемых вдоль полотна, и значением ψ_2 в точке s, t, v.

2. Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1.0) и (1.1), необходимо присоединить к ним уравнения, описывающие процессы производства, распределения пара и соответствующего расхода топлива.

Предположим, что рассматривается неконденсационный паровоз, в котором мятый пар возвращается в котел. Тогда из закона изменения массы рабочего вещества — воды и пара легко составить равенство

$$m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + [1 + \delta_2(\delta_1 - 1)(1 - \varepsilon_0)]m_6 = M(t_0), \tag{2.0}$$

в котором m_k $(k = \overline{2,6})$ — количества имеющихся или полученных масс воды в котле, воды в тендере, пара в паровом пространстве котла, пара, произведенного на дрифтинг, и рабочего пара; δ_1 и δ_2 — доли от единицы количества пара (направляемые в служебный расход и возвращаемые котлу в виде мятого пара); $M(t_0)$ — известная постоянная.

Запишем уравнение расхода тепла, учитывающее возможность займа от котла, согласно формуле:

$$\Delta Q = C_1(dm_4 + dm_5 + dm_6) + C_2 dm_3 - C_0(1-\varepsilon_0)(1-\delta_1)\delta_2 dm_6 + \\ + [\alpha_2(m_2, \Gamma_2)(T_2 - \vartheta_2) + \alpha_4(m_4, \Gamma_4)(T_4 - \vartheta_4)]dt = R\eta_k Q_0 y dt, \tag{2.1}$$

где C_1 — разность теплосодержаний пара и воды; C_2 — разность теплосодержаний воды в тендере и в котле; C_0 — теплосодержание мятого пара; $\alpha_i(m, \Gamma)$ — коэффициенты остывания воды в котле и пара в паровом пространстве, зависящие от распределения масс, площадей и геометрии поверхностей Γ $(i = 2, 4)$; $T_k - \vartheta_k$ — перепад температур на поверхностях Γ_2 и Γ_4; R — площадь колосников решетки; Q_0 — теплотворная способность топлива; η_k — коэффициент полезного действия котла; y — интенсивность горения.

Исходя из очевидных соображений о распределении пара и кривых на стр. 66—68 в [1], показывающих расход топлива, можно, исключив величину m_2 с помощью (2.0) в уравнении (2.1), получить следующую систему уравнений:

$$dx_0/dt = -Ry(z)$$

$$dm_3/dt = C_2^{-1}\{RQ_0\eta_k y(z) - C_1(m_4' + m_5') + \\ + [C_0\delta_2(1-\delta_1)(1-\varepsilon_0) - C_1]m_6' + \alpha_2(\vartheta_2 - T_2) + \alpha_4(\vartheta_4 - T_4)\}$$

$$dm_4/dt = Hu_4, \qquad dm_5/dt = H(1-\eta)z_{1d}, \qquad dm_6/dt = H\eta[f^1(y) - u_4] \tag{2.2}$$

и неравенств:

$$x_{00} \leqslant x_0 \leqslant x_{01}, \qquad f^1(y) \geqslant \max(0, u_4), \\ \beta \leqslant z_1 \leqslant z^1, \qquad m_3' \leqslant 0. \\ -\overset{0}{u_4} \leqslant u_4 \leqslant u_4', \tag{2.3}$$

Здесь приняты обозначения:

x_0 — масса топлива; $y(z)$ — интенсивность горения y в зависимости от рабочего пара z

$$z = \alpha[\eta z_1 + (1-\eta)z_{1d}] + \beta; \tag{2.4}$$

α и β — постоянные; z_{1d} — скорость расхода пара на дрифтинг, который (согласно [1], стр. 93, 181, 388) можно аппроксимировать функцией $a_{11}v(v + a_{12})^{-1}$ с подходящими постоянными a_{11} и a_{12}; H — испаряющая поверхность нагрева котла; $\alpha_2 = \alpha_2(m_2, \Gamma_2)$, $\alpha_4 = \alpha_4(m_4, \Gamma_4)$, причем величина m_2 заменена согласно (2.0); $f^1(y)$ — обратная функция по отношению к $y(z_1)$, x_{00}, x_{01}; z^1, β, $\overset{0}{u_4}$, $\overset{1}{u_4}$ — известные положительные постоянные. Отметим, что второе уравнение в серии (2.2) включает также описание процесса займа от котла.

Для скорости расхода массы тендера имеем формулу

$$m_0' = x_0' + m_3'. \tag{2.5}$$

Сделаем следующие упрощающие предположения. Отбросим в уравнении (1.0) после деления всех его членов на сумму $m_1 + IR^{-2}$ члены с коэффициентами m_0 и m_0' (последний определен формулой (2.5)), считая реактивную силу незначительной. Исключим из рассмотрения бустер и тормозные режимы движения (использующие тормозные колодки и контрпар). Тогда величина η станет равна $Sg\varrho$. Предположим, что скорость на всем полотне заключена в постоянных пределах

$$v_{10} < v < v_{20}. \tag{2.6}$$

Назовем нормальным режимом движения случай отсутствия займа от котла и накопления пара в паровом пространстве. Первое остается на усмотрении обслуживающей команды для большей гибкости управления, а второе можно считать нерациональным ввиду расхода топлива, компенсирующего охлаждение, отмеченное членом α_2 в серии уравнений (2.2). Предположим далее, что запасы воды и угля в тендере достаточны для осуществления режима движения состава с минимальным расходом топлива.

Все эти допущения позволяют считать совокупность упрощенных уравнений (1.0), (1.1) и первого из серии уравнений (2.2) основной системой, описывающей возможные режимы движения состава вдоль полотна. При этом необходимо учесть ограничения (2.6), неравенство (1.3) при $\eta = 1$ и зависимость $y(z)$, заданную посредством одной из фигур типа 43—48 на стр. 66—68 работы [1].

Нетрудно убедиться, что в первом из уравнений (2.2) можно сделать замену

$$y(z) = \eta y[z(z_1)] + (1 - \eta)\, y[z(z_{1d})], \tag{2.7}$$

между тем как фигуры 43—48 дают представление о гиперболическом характере зависимости между y и z. Пусть направляющий вектор нисходящей асимптоты имеет проекции $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ на оси y и z, направляющий вектор восходящей асимптоты обладает проекциями $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ на те же оси. Обозначим координаты точки пересечения этих асимптот y_0 и z_0, а одинаковую для каждой точки гиперболы площадь характерного параллелограмма C_1^0 (как следует из фигур 43—48, этот параметр для гипербол достаточно мал).

Можно заметить, что для исследуемых гипербол справедливо неравенство

$$D = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 > 0.$$

Выбирая соответствующую ветвь решения, получим, учитывая (2.7), выражение для $y(z_a)$

$$y(z_a) = D_1\{D_2(\alpha z_a + \beta) - [D^2(\alpha z_a + \beta_0) - 4C_1^0\lambda_2\mu_2]^{1/2}\}. \tag{2.8}$$

Здесь обозначены:

$$a = 1,\ 1d,\ D_1 = (2\lambda_2\mu_2)^{-1},\ D_2 = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1$$

$$\beta_2 = D_1^{-1}D_2^{-1}\, y_0 + \beta - z_0,\ \beta_0 = \beta - z_0.$$

При достаточно малом C_1^0 можно зависимость (2.8) заменить линейной, в которой

$$y(z_a) = \begin{cases} l_1 z_a, & z_a \leqslant z_0, \\ l_2(z_a - z_0) + l_1 z_0, & z_a \geqslant z_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

и где постоянные наклоны обозначены l_1, l_2 $(0 < l_1 < l_2)$.

Для лучшего приближения зависимости (2.8) линейными соотношениями вида (2.9) необходимо увеличить число разбиений в окрестности точки y_0, z_0, что не приведет к существенным изменениям в способе решения рассматриваемой задачи.

Поскольку уравнение z_1 ограничено неравенством (1.3) первого рода [2], осуществим переход к новому управлению ξ в соответствии с приемом, предложенным в работе [3], по формуле

$$z_1 - \Phi f_1(z_1, v) + \xi^2 = 0 \tag{2.10}$$

(здесь обозначено: $\Phi = 10^2 v P_{\text{сц}} \psi_1 [27H(1+\mu)]^{-1}$; $P_{\text{сц}}$ — сцепной вес локомотива).

Аппроксимируя зависимость f_1, изображенную графиками на таблицах 77, 78, 81 (см. [1], стр. 95, 96), получим:

$$f_1 = y_2' z_1^2 + 2y_1' z_1 + y_0', \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned} y_0' &= k_0 + 10^{-3} k_1 z_0'^2 + p_0 (v - v_{30})^2 \\ y_1' &= -[10^{-3} k_1 z_0' + (v - v_{30}) p_0 p_2] \\ y_2' &= [10^{-3} k_1 + p_0 p_2^2], \end{aligned} \tag{2.12}$$

а значения постоянных k, p, v_{30}, z_0' для серий $\text{Е}_\text{А}$, Е, $\text{С}^\text{У}$ можно получить из следующей таблицы:

(2.13)

	k_0	k_1	p_0	p_2	v_{30}	z_0'
$\text{Е}_\text{А}$	7,9	1,1	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	0,4	18	50
Е	9,2	1,0	$8 \cdot 10^{-3}$	0,4	20	50
$\text{С}^\text{У}$	7	0,4	$4 \cdot 10^{-4}$	0	75	75

Решим квадратное уравнение (2.10), в котором Φ_1 заменено из равенства (2.11) согласно значениям (2.12). Из таблицы (2.13) следует, что выполняются ограничения

$$y_0' > 0, \qquad y_2' > 0, \qquad 1 - 2\Phi y_1 \geqslant 0, \qquad (1 - 2\Phi y_1')^2 - 4\Phi^2 y_0' y_2' \geqslant 0,$$

которые определяют следующую ветвь значений z_1:

$$z_1 = (2\Phi y_2')^{-1} \{1 - 2\Phi y_1' - [(1 - 2\Phi y_1')^2 + 4\Phi y_2' (\xi^2 - \Phi y_0')]^{1/2}\}. \tag{2.14}$$

Поскольку функция $y(z_a)$ определена формулой (2.8) для неотрицательных значений скорости расхода z_a, необходимо, чтобы величина ξ (2.14) удовлетворяла неравенству

$$\xi^2 \leqslant \Phi y_0'.$$

Вновь применим прием Валентайна — заменим ξ^2 из равенства

$$\xi^2 = \Phi y_0' (1 + w^2)^{-1}. \tag{2.15}$$

Аналогично можно трактовать случай, когда $1 - 2\Phi y_1 < 0$, приводящий ко второй ветви для z_1 и другой замене для ξ^2.

Область возможных значений нового управления w есть $[-\infty, +\infty]$. Для достаточно большого значения предела v_{10} и некоторых серий локомотивов можно считать коэффициенты y_1' и y_2 весьма малыми, а для z_1 из (2.10) получим формулу

$$z_1 = \Phi y_0' - \xi^2, \tag{2.16}$$

в которой ξ^2 следует считать функцией w, заданной равенством (2.15).

3. Запишем теперь основную систему в новых обозначениях:

расход топлива $x_1 = x_{01} - x_0$, (3.0)

пройденный локомотивом путь $x_2 = s$,

функция от x_3, ограничивающая изменение скорости,

$$v = v_{10} + (v_{20} - v_{10})(1 + \exp x_3)^{-1},$$

в которых она примет вид:

$$dx_1/dt = R\{\eta y[z(z_1)] + (1 - \eta) y[z(z_{1d})]\} = \varphi_1(x_2, x_3, \eta, w)$$

$$dx_2/dt = v_{10} + (v_{20} - v_{10})(1 + \exp x_3)^{-1} = \varphi_2(x_3) \tag{3.1}$$

$$dx_3/dt = \zeta^0 \{\eta F_1(x_3, z_1) + (\eta - 1) F_3(x_3) + G(x_2) + S(x_2, x_3)\} =$$

$$= \varphi_3(x_2, x_3, \eta, w),$$

где использованы обозначения [1] (стр. 237—239)

$$\zeta^0(x_3) = 127 \exp(-x_3)(1 + \exp x_3)^2 (1 + \gamma)^{-1} (P + Q)^{-1} (v_{10} - v_{20})^{-1}$$

$$\gamma = 10^{-3} (P + Q)^{-1} R^{-2} g I \tag{3.2}$$

$$F_3 = P(w_{00}' + w_{01}' v + w_{02}' v^2)$$

w_{0i}' — постоянные, соответствующие формулам 91, 92 работы ([1], стр. 181).

Предполагается, что в выражениях (3.1) и (3.2) вместо переменной v использовано ее значение из обозначений (3.0), причем для величин

F_i, G и S, заданных согласно формулам (1.2), (1.7), (1.9), использованы прежние обозначения. Кроме того, ограничимся разбором двух следующих случаев:

А) z_1 задано согласно формуле (2.16), $y(z_a)$ — согласно равенству (2.8);

Б) z_1 определяется соотношениями (2.14), $y(z_a)$ — в соответствии с (2.9).

Исследование общего случая, соответствующего комбинации равенств (2.8) и (2.14), как можно заметить из последующего, осложняется необходимостью нахождения точек максимума функции H_1 Понтрягина [4], тогда как для случаев А) и Б) применим аналитический метод.

Действительно, для нахождения управлений η и w, минимизирующих расход топлива состава при его движении между точками x_{20}, x_{21} (пусть $x_{20}=0$ для простоты) за время T_0 с граничными значениями x_{30}, x_{31} и начальным расходом топлива $x_{10}=0$, необходимо, согласно ([4], стр. 76—78), определить η и w как функции от координат и импульсов $\eta(x,p)$, $w(x,p)$, которые доставляют функции $H_1=\sum\limits_{i=1}^{3}\varphi_i p_i+p_4$ максимум. Здесь, как известно, импульсы определяются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} &dp_1/dt=0\\ &dp_2/dt=\partial\varphi_1/\partial x_2-p_2\,\partial\varphi_2/\partial x_2-p_3\,\partial\varphi_3/\partial x_2\\ &dp_3/dt=\partial\varphi_1/\partial x_3-p_2\,\partial\varphi_2/\partial x_3-p_3\,\partial\varphi_3/\partial x_3 \end{aligned}\tag{3.3}$$

и граничным условием $p_1=-1$. Для начальных значений величин p_2, p_3 можно указать лишь приближенные начальные значения p'_{20}, p'_{30}, прибегая для этого к следующему соображению. Система уравнений (3.1), (3.3) допускает, согласно [4], интеграл

$$-\varphi_1(x_2,x_3,\eta,w)+p_2\varphi_2(x_3)+p_3\varphi_3(x_2,x_3,\eta,w)=-p_4=\mathrm{const},\tag{3.4}$$

в котором управления η и w выбраны оптимальными. Подставим в равенство (3.4) вместо величин x_2, x_3, η, w их оптимальные значения, достигнутые на практике. Тогда функции φ_i $(i=\overline{1,3})$ обратятся в известные функции времени $\varphi_i^*(t)$.

В итоге двукратного дифференцирования выражения (3.4) в точке $t=0$, соответствующей началу движения, получим для определения приближенных начальных значений p'_{20}, p'_{30} систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\sigma_2p'_{20}+\sigma_3p'_{30}=-\sigma_1\\ &\vartheta_2p'_{20}+\vartheta_3p'_{30}=-\vartheta_1, \end{aligned}$$

коэффициенты и оператор U которой равны

$$\vartheta_i=U(\sigma_i),\ \ \sigma_i=U(\varphi_i),\ \ U(\varphi)=\varphi'-\varphi_2\,\partial\varphi/\partial x_2-\varphi_3\,\partial\varphi/\partial x_3\qquad(i=\overline{1,3})$$

и предполагается, что в конце вычислений положено $t=0$, тогда как значения $\partial\varphi/\partial x_i$ вычислены вдоль оптимальных траекторий, достигнутых на практике.

Необходимо отметить особенности системы уравнений (3.1), (3.3). Функция φ_3 содержит член $\zeta^0(x_3)\ G(x_2)$, по отношению к которому частная производная по x_2 терпит в точках $x_{2(k+1)} - l$, $x_{2(k+1)}$ разрыв, переходя от нулевых значений вне ограниченного этими точками промежутка к значениям, зависящим от скорости внутри этого промежутка. Поскольку в условиях эксплуатации локомотива ударные силы в отмеченных точках профиля пути отсутствуют, естественно «сгладить» разрыв, аппроксимировав соответствующее ступенчатое значение производной функцией с графиком вписанной в ступень симметричной трапеции:

$$d\tilde{G}/dx_2 = \begin{cases} 0; & x_{2k} \leqslant x_2 \leqslant x_{2(k+1)} - l \\ g_k\delta^{-1}(x_2 - x_{2(k+1)} - l); & x_{2(k+1)} - l \leqslant x_2 \leqslant x_{2(k+1)} - l + \delta \\ g_k; & x_{2(k+1)} - l + \delta \leqslant x_2 \leqslant x_{2(k+1)} - \delta \\ g_k - g_k\delta^{-1}(x_2 - x_{2(k+1)} + \delta); & x_{2(k+1)} - \delta \leqslant x_2 \leqslant x_{2(k+1)} \\ 0; & x_{2(k+1)} \leqslant x_2 \leqslant x_{2(k+1)} - l, \end{cases} \tag{3.5}$$

где обозначены: $\tilde{G}$ — новая аппроксимация функции сопротивления от уклона; $g_k = -2(P+Q)u_{2k}$; δ — малый произвольный параметр $(\delta < 2^{-1}l)$. Ввиду $\varphi_2 \neq 0$ можно исключить переменную p_2, используя интеграл (3.4)

$$p_2 = (\varphi_1 - p_3\varphi_3 - p_4)\varphi_2^{-1}, \tag{3.6}$$

понизив на единицу порядок системы (3.1), (3.3).

Нетрудно заметить, что приближенные начальные значения p'_{20}, p'_{30} определяют по формуле (3.4) значение интеграла p'_{40}. Между тем, интегрируя по времени левую часть равенства (3.4) вдоль оптимальной на практике траектории и умножая результат на $-T_0^{-1}$, получим другое значение начального приближения интеграла p''_{40}. Осредним таким же образом значение производной от H_1 по времени, получив для определения p''_{20}, p''_{30} линейную систему уравнений с параметром p''_{40} в правой части.

Далее очевидно, что для нахождения оптимальных управлений достаточно воспользоваться той частью функции Понтрягина, которая содержит управления, т. е. выражением

$$H_0 = \eta\{R[y(z_{1d}) - y(z_1)] + \zeta^0 p_3[F_1(z_1, x_3) - F_3(x_3)]\}. \tag{3.7}$$

Для выбора оптимального управления η из выражения (3.7) получим следующее правило:

$$\eta = \begin{cases} 0, & H_{(\eta)} < 0 \\ +1, & H_{(\eta)} > 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Множество значений x_2, x_3, w, на которых обращается в нуль функция $H_{(\eta)} = R[y(z_{1d}) - y(z_1)] + \zeta^0 p_3[F_1(z_1, x_3) - F_3(x_3)]$, определяет точки переключения релейного режима управления регулятором η. Если $H_{(\tau_i)} \equiv 0$, то возникает особый режим, который может отличаться от указанного формулой (3.8) и здесь не исследуется.

Управление η, заданное согласно (3.8), можно записать компактно:

$$\eta = \mathrm{Sg}\,[H_{(\tau_i)}]\,.$$

При движении состава с закрытым регулятором ($H_{(\tau_i)} < 0$), т. е. в случае дрифтинга, скорость расхода пара является фиксированной и равной z_{1d}, а режим расхода топлива в случаях А) и Ξ) определяется согласно формуле (2.8).

Сложнее установить скорость расхода топлива при $H_{(\tau_i)} > 0$. Действительно, при движении с открытым регулятором оптимальное управление w должно доставлять максимум той части H_2 функции H_0, которая зависит от w, а именно:

$$H_2 = -Ry(z_1) + \zeta^0 p_3 F_1(z_1, x_3)\,. \tag{3.9}$$

Поскольку область значений w совпадает с числовой осью, то максимум функции H_2 доставляется одним из изолированных значений w, обобщающих производную непрерывно дифференцируемой функции H'_{2w} в нуль.

Используя равенство (3.9), получим для функции H'_{2w} значение

$$H'_{2w} = \partial z_1/\partial\xi^2\, \partial\xi^2/\partial w\, (\zeta^0 p_3\, \partial F_1/\partial z_1 - R\, \partial y/\partial z_1)\,. \tag{3.10}$$

Для случая А) это выражение приобретает вид

$$2\Phi y'_0 w\,(1 + w^2)^{-2}\,[E_1\chi\,(\chi^2 + E_2)^{-1/2} + E_0], \tag{3.11}$$

где обозначены

$$E_0 = 270\zeta^0 p_3 (y'_0 v)^{-1} - \alpha R D_1 D_2$$
$$E_1 = \alpha R D_1 D > 0$$
$$E_2 = -4C_1^0\lambda_2\mu_2 > 0$$
$$\chi = D\,(\alpha z_1 + \beta) > 0.$$

Выражение (3.11) обращается в нуль при следующих значениях w:

$$w = \mp\infty = w_1$$
$$w = 0 = w_2$$
$$w = \chi_0^{1/2}(1 - \chi_0)^{-1/2} = w_3.$$

Здесь под χ_0 понимается выражение $\{-E_0 E_1^{-1} E_2^{1/2} [1 - E_0^2 E_1^{-2}]^{-1/2} - \beta D\}\,(D\alpha\Phi y'_0)^{-1}$.

Корень w_3 существует, если выполнены неравенства $0 \leqslant \chi_0 < 1$ и $-1 < E_0 E_1^{-1} < 0$. Искомое оптимальное управление определяется поэтому формулой

$$w = \arg\max\,[H(w_i)] \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3.12}$$

Смысл управлений w_1, w_2 для случая А) легко усмотреть из формулы (2.15). Управление w_1 определяет максимально возможную при данном сцепном весе подачу топлива, а w_2 устанавливает минимальную подачу топлива, так как согласно (2.15) и (2.16) $z_1 = 0$.

Исследуем случай Ξ). Значение производной H'_{2w} можно записать так:

$$2\Phi y'_0\, w(1+w^2)^{-3/2}\{(1-2\Phi y'_1)^2 + w^2[(1-2\Phi y'_1)^2 - 4\Phi^2 y'_0 y'_2]\}^{-1/2} P_4 Q_4^{-1}, \tag{3.13}$$

где $P_4 = P_4(z_1, v) = 270\zeta^0 p_3(y'_0 - y'_2 z_1^2)\, v^{-1} - Rl_i(y'_2 z_1^2 + 2y'_1 z_1 + y'_0)^2$ $(i = 1, 2)$

$$Q_4 = Q_4(z_1, v) = (y'_2 z_1^2 + 2y'_1 z_1 + y'_0)^2.$$

Для обращения в нуль выражения (3.13) необходимо, чтобы оптимальное значение w совпало с одним из следующих шести значений

$$w_1 = \mp\infty; \qquad w_2 = 0; \quad w_4 = w_4^i \qquad (i = \overline{1, 4}).$$

Здесь w_4^i соответствует по формулам (2.10) и (2.15) четырем (если таковые существуют) корням полинома P_4. Условия существования действительных управлений w_4^i нетрудно получить, указав явную зависимость $w^2(z_1)$, именно:

$$w^2 = \Phi y'_0(y'_2 z_1^2 + 2y'_1 z_1 + y'_2)[\Phi - z_1(y_2 z_1^2 + 2y'_1 z_1 + y'_0)]^{-1} - 1. \tag{3.14}$$

Обозначим действительные значения w^i, отвечающие неотрицательным корням полинома P_1, через v^i. Тогда искомое оптимальное управление w определяется из равенства

$$w = \arg\max\,[H(v^i), H(w_j)] \qquad (j = \overline{1, 2}). \tag{3.15}$$

Отметим, что в системе четвертого порядка, соответствующей совокупности уравнений (3.1), (3.3), после исключения импульсов $p_1 = -1$ и p_2 согласно формуле (3.6) удобно непосредственно заменить величину z_1 на функцию от x_2, x_3, p_3 из формул (2.15), (2.16) или (2.14), (2.15), в которых оптимальное управление w выражено из (3.12) или (3.15).

Для решения полученной системы уравнений можно применить предложенный в работе [5] метод, причем в качестве приближенных начальных значений параметров p_{30} и p_{40} можно использовать одну из групп величин p'_{30}, p'_{40} или p''_{30}, p''_{40}, упомянутых ранее.

В заключение можно остановиться на некоторых замечаниях относительно постановки и формы решения задачи. Предыдущие рассуждения полностью сохраняются для других представлений функций $G(x_2)$ и $S(x_2, x_3)$ по отношению к приведенным в формулах (1.9) и (3.5). Получаемый после интегрирования упомянутой системы четвертого порядка режим управления необходимо сгладить для устранения возможности эффекта превышения местного предела сцепления [6]. Полученный режим следует, наконец, приблизить кусочно-постоянным C^+ [7] режимом расхода топлива, учитывая экономию рабочего времени на переключение. Такое приближение, естественно, будет определять относительный минимум расхода топлива (в классе функций C^+) и, следовательно, может представить практический интерес.

Весьма существенным фактором, определяющим экономию топлива, оказывается, согласно (3.12) и (3.15), наиболее точное знание величины $\psi_1(x_2, x_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабичков А. М., Егорченко В. Ф., Тяга поездов, М., 1947.
2. Троицкий В. А., Прикл. матем. и механика, **26**, вып. 3, 431—443 (1962).
3. Valentine A., The problem of Lagrange with differential inequalities as side conditions, Dissertation, University of Chicago, 1937.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961, с. 76—78.
5. Ульм С., О решении краевых задач, вытекающих из принципа максимума, См. настоящий номер журнала, стр. 3—12.
6. Barwell F., New Scientist, **28**, No. 474, 796, Dec. 16, 1965.
7. Шилов Г. Е., Математический анализ, Спец. курс, М., 1960, с. 134.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/VI 1966

I. KEIS

KÜTUSE KOKKUHOIUST VEDURI LIIKUMISEL

Ülesanne, millega taotletakse leida minimaalse kütusekuluga liikumisrežiim, taandatakse A. Valentine'i ja L. S. Pontrjagini meetodi abil nelja mittelineaarse diferentsiaalvõrrandi integreerimisele, kusjuures soovitatakse kasutada S. Ulmi lahendusviisi [5].

I. KEIS

ON THE FUEL MINIMIZATION PROBLEM USED IN THE LOCOMOTIVE MOTION PROCESS

Exploiting the methods of A. Valentine and L. S. Pontryagin the problem is reduced to the question of four non-linear differential equations integration. The latter could be treated in the same way as it was shown in paper [5].