EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.1.05

Ф. ВИХМАНН

О ФОРМАЛЬНОМ УМНОЖЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ

В известной монографии Г. Харди [1] приведена теорема 175: если $a_n = o(1)$ и $\sum n|b_n| < \infty$, то $\sum\limits_{k=0}^{n}(\sum\limits_{i=0}^{k} a_{k-i}b_i) - \sum b_k \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = o(1)$, т. е. произведение Коши рядов $\sum a_k$ и $\sum b_k$ есть ряд, равносходящийся с рядом $B\sum a_k$.

В 1961 г. В. Третьяков [2] рассмотрел одно возможное обобщение этой теоремы на случай двойных рядов, а в августе 1965 г. в летней школе по теории рядов в Кяярику доложил о весьма широком обобщении теоремы в случае простых и двойных рядов. Поскольку по теореме Мертенса произведение Коши сходящегося и абсолютно сходящегося рядов сходится, то обобщения приведенной теоремы заключаются в том, что на первый ряд налагается условие, которое слабее сходимости (задается скорость стремления к нулю a_n), а на второй ряд — условие, которое сильнее абсолютной сходимости. Вместе эти два условия гарантируют равносходимость соответствующих рядов.

Целью настоящей статьи является доказательство аналогичных теорем в случае интегралов Римана.

Теорема 1. *Если*

1° $a(t) = o(t+1)^{-\alpha}$ при $t \to +\infty$,

2° $A(x) = \int\limits_0^x a(t)\,dt$ *существует при любом* $x > 0$,

3° $B(x) = \int\limits_0^x b(t)\,dt$ *существует при любом* $x > 0$

и $\int\limits_0^\infty (t+1)^\beta |b(t)|\,dt < \infty$,

4° $\alpha + \beta > 1$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$,

то

$$C(x) - BA(x) = o(1) \quad \textit{при } x \to +\infty,$$

где

$$B = \int\limits_0^\infty b(t)\,dt, \quad C(x) = \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y a(t)\,b(y-t)\,dt.$$

При доказательстве используется следующая

Лемма 1 ([1], теорема 6). *Чтобы для каждой ограниченной $s(t)$ из $s(t)=o(1)$ $(t\to+\infty)$ следовало*

$$t(x)=\int_0^x \gamma(x,t)s(t)\,dt=o(1)\qquad(x\to\infty),$$

достаточно выполнения условий

$$1^\circ \int_0^a |\gamma(x,t)|\,dt=o(1)\ \ (x\to+\infty)\ \text{при любом } a<x,$$

$$2^\circ \int_0^x |\gamma(x,t)|\,dt=O(1).$$

Условие 2° необходимо (для достаточно больших x).

Доказательство. Поскольку

$$C(x)=BA(x)-\int_0^x a(t)\,dt\int_{x-t}^\infty b(y)\,dy=BA(x)-r(x),$$

то достаточно показать, что $r(x)=o(1)$. Но $r(x)$ можем представить в виде

$$\int_0^x \gamma(x,t)\,(t+1)^\alpha a(t)\,dt,$$

где

$$\gamma(x,t)=(t+1)^{-\alpha}\int_{x-t}^\infty b(y)\,dy.$$

Значит, ввиду условия 1°, осталось показать, что $\gamma(x,t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Условие 1°, очевидно, выполнено. Для условия 2°, в силу условий 3° и 4°, получим

$$\int_0^x (t+1)^{-\alpha}dt\left|\int_{x-t}^\infty b(y)\,dy\right|=O(1)\int_0^x (t+1)^{-\alpha}(x+1-t)^{-\beta}dt\times$$

$$\times\int_{x-t}^\infty (y+1)^\beta|b(y)|\,dy=O(1)\left[\int_0^{x/2}(t+1)^{-\alpha}(x+1-t)^{-\beta}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{x/2}^x (t+1)^{-\alpha}(x+1-t)^{-\beta}dt\right]=O(1)\left[\left(\frac{x}{2}+1\right)^{-\beta}\int_0^{x/2}(t+1)^{-\alpha}dt+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{2}+1\right)^{-\alpha}\int_{x/2}^x (x+1-t)^{-\beta}dt\right]=O(1).\qquad(*)$$

Замечание 1. Условие 4° нельзя ослабить. Действительно, пусть $b(y) = 0{,}5(y+2)^{-1}\ln^{-1,5}(y+2)$. Тогда

$$r(x) = \frac{1}{2}\int_0^x a(t)\,dt \int_{x-t}^{\infty} [(y+2)\ln^{1,5}(y+2)]^{-1} dy =$$

$$= \int_0^x \ln^{-0,5}(x-t+2)\,a(t)\,dt = \int_0^x [(t+1)\,a(t)][(t+1)\ln^{0,5}(x-t+2)]^{-1} dt.$$

Пусть $(t+1)a(t) = o(1)$, т. е. $\alpha = 1$, а β, очевидно, равняется нулю. Значит, условие 4° не выполнено. Если $r(x) = o(1)$ при любом $(t+1)a(t) = o(1)$, то должно быть выполнено условие 2° леммы 1, т. е.

$$p(x) = \int_0^x [(t+1)\ln^{0,5}(x-t+2)]^{-1} dt = O(1).$$

Но $p(x) > \ln^{-0,5}(x+2)\int_0^x (t+1)^{-1} dt \to \infty$ при $x \to \infty$.

Теорема 2. *Если*

1° $\lim\limits_{s,t\to\infty} (s+1)^{\alpha}(t+1)^{\beta} a(s,t) = 0$ и $a(s,t) = O(1)$,

2° $\int\limits_0^x\int\limits_0^y a(s,t)\,ds\,dt = A(x,y)$ *существует при любых* $x, y \geqslant 0$,

3° $\int\limits_0^x\int\limits_0^y b(s,t)\,ds\,dt = B(x,y)$ *существует при любых* $x, y \geqslant 0$

и $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} (s+1)^{\gamma}(t+1)^{\delta}\,|b(s,t)|\,ds\,dt < \infty$,

4° $\alpha+\gamma > 1$, $\beta+\delta > 1$, $\gamma+\beta > 1$, $\alpha+\delta > 1$, $\alpha+\beta \geqslant 1$,

5° $\alpha+\beta+\gamma \geqslant 2$, $\alpha+\beta+\delta \geqslant 2$ $(\alpha, \beta > 0;\ \gamma, \delta \geqslant 0)$,

то

$$C(x,y) - BA(x,y) \to 0 \quad \text{при} \quad (x,y)_{\lambda} \to \infty,$$

где

$$C(x,y) = \int_0^x\int_0^y du\,dv \int_0^u\int_0^v a(s,t)\,b(u-s, v-t)\,ds\,dt,$$

$$B = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} b(s,t)\,ds\,dt.$$

Под сходимостью $(x, y)_\lambda \to \infty$ понимается стесненная сходимость, т. е. x и y стремятся к бесконечности так, что $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \lambda$, где $\lambda \geqslant 1$.

При доказательстве теоремы используется

Лемма 2. *Чтобы для каждой ограниченной $z(s, t)$ из $\lim\limits_{s,\, t \to \infty} z(s, t) = 0$ следовало*

$$w(x, y) = \int_0^x\int_0^y \gamma(x, y, s, t)\, z(s, t)\, ds\, dt \to 0$$

при $(x, y) \to \infty$, достаточно выполнения условий

$$1^\circ \quad \lim_{x,\, y \to \infty} \int_0^x\int_0^b |\gamma(x, y, s, t)|\, ds\, dt = 0,$$

$$2^\circ \quad \lim_{x,\, y \to \infty} \int_0^a\int_0^y |\gamma(x, y, s, t)|\, ds\, dt = 0,$$

$$3^\circ \quad \int_0^x\int_0^y |\gamma(x, y, s, t)|\, ds\, dt = O(1).$$

Если сходимость $(x, y) \to \infty$ заменить стесненной сходимостью $(x, y)_\lambda \to \infty$, то условия 1°—3° должны выполняться для $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{v}{x} \leqslant \lambda$. Условие 3° необходимо (для достаточно больших x и y), условия 1° и 2° необходимы при $\gamma(x, y, s, t) \geqslant 0$.

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1.

Доказательство. Поскольку

$$C(x, y) = \int_0^x\int_0^y a(s, t)\, ds\, dt \int_s^x\int_t^y b(u - s, v - t)\, du\, dv = BA(x, y) -$$

$$- \int_0^x\int_0^y a(s, t)\, ds\, dt \int_0^\infty \int_{y-t}^\infty b(u, v)\, du\, dv - \int_0^x\int_0^y a(s, t)\, ds\, dt \int_{x-s}^\infty \int_0^\infty b(u, v)\, du\, dv +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y a(s, t)\, ds\, dt \int_{x-s}^\infty \int_{y-t}^\infty b(u, v)\, du\, dv = BA(x, y) - r_1 - r_2 + r_3,$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{(x,\, y)_\lambda \to \infty} r_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

1) Представим

$$r_3 = \int_0^x\int_0^y \gamma_1(x, y, s, t)\, (s + 1)^\alpha (t + 1)^\beta\, a(s, t)\, ds\, dt,$$

где

$$\gamma_1 = (s+1)^{-\alpha}(t+1)^{-\beta} \int\limits_{x-s}^{\infty}\int\limits_{y-t}^{\infty} b(u,v)\,du\,dv.$$

Ввиду условия 1° достаточно проверить для γ_1 выполнение условий леммы 2. Для условия 3°, поскольку $\alpha+\gamma>1$ и $\beta+\delta>1$, получим

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y (s+1)^{-\alpha}(t+1)^{-\beta}\,ds\,dt \left| \int\limits_{x-s}^{\infty}\int\limits_{y-t}^{\infty} b(u,v)\,du\,dv \right| =$$

$$= O(1)\int\limits_0^x (s+1)^{-\alpha}(x-s+1)^{-\gamma}\,ds \int\limits_0^y (t+1)^{-\beta}(y+1-t)^{-\delta}\,dt = O(1).$$

Так как

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^b (s+1)^{-\alpha}(t+1)^{-\beta}\,ds\,dt \left| \int\limits_{x-s}^{\infty}\int\limits_{y-t}^{\infty} b(u,v)\,du\,dv \right| =$$

$$= O(1)\int\limits_0^x (s+1)^{-\alpha}(x-s+1)^{-\gamma}\,ds \left[\int\limits_0^b (t+1)^{-\beta}\,dt \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{x-s}^{\infty}\int\limits_{y-t}^{\infty} (u+1)^{\gamma}\,|b(u,v)|\,du\,dv \right] = O(1)\int\limits_0^x (s+1)^{-\alpha}(x-s+1)^{-\gamma} \times$$

$$\times A(x,y,s)\,ds = o(1) \qquad (y\to\infty),$$

ввиду $\lim\limits_{y\to\infty} A(x,y,s) = 0$ (равномерно относительно x и s), то условие 1° леммы 2 выполнено. Условие 2° проверяется аналогично. Значит, $\lim\limits_{(x,\,y)\to\infty} r_3 = 0.$

2) Рассмотрим

$$r_2 = \int\limits_0^x\int\limits_0^y \gamma_2(x,y,s,t)\,(s+1)^{\alpha}(t+1)^{\beta}a(s,t)\,ds\,dt,$$

где

$$\gamma_2 = (s+1)^{-\alpha}(t+1)^{-\beta} \int\limits_{x-s}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} b(u,v)\,du\,dv.$$

Покажем, что условия леммы 2 относительно стесненной сходимости выполнены, т. е. $\lim\limits_{(x,\,y)_\lambda\to\infty} r_2 = 0.$

Если $\alpha+\gamma>1$, $\alpha>0$ и $\gamma>0$, то, учитывая (*), получим для условия 1°

$$p(x) = \int\limits_0^x\int\limits_0^b (s+1)^{-\alpha}(t+1)^{-\beta}\,ds\,dt \left| \int\limits_{x-s}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} b(u,v)\,du\,dv \right| =$$

$$= O(1) \int_0^x \int_0^b (s+1)^{-\alpha} (t+1)^{-\beta} (x+1-s)^{-\gamma} \, ds \, dt \times$$

$$\times \int_{x-s}^{\infty} \int_0^{\infty} (u+1)^{\gamma} \, | b(u, v) | \, du \, dv = O(1) \int_0^x (s+1)^{-\alpha} (x+1-s)^{-\gamma} \, ds =$$

$$= o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Если же $\gamma = 0$, то $\alpha > 1$ и $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = 0$ очевидно. Для условия 2° получим

$$q(x, y) = \int_0^a \int_0^y (s+1)^{-\alpha} (t+1)^{-\beta} \, ds \, dt \left| \int_{x-s}^{\infty} \int_0^{\infty} b(u, v) \, du \, dv \right| =$$

$$= O(1) \int_0^a \int_0^y (s+1)^{-\alpha} (t+1)^{-\beta} (x-s+1)^{-\gamma} \, ds \, dt =$$

$$= O(1) \, (x-a+1)^{-\gamma} [(y+1)^{1-\beta} - 1] = o(1),$$

если только $\beta + \gamma > 1$, $\gamma > 0$ и $(x, y)_\lambda \to \infty$. Так как при $\gamma = 0$ $\beta > 1$, то непосредственно ясно, что $\lim\limits_{x \to \infty} q(x, y) = 0$ равномерно относительно y.

Осталось условие 3° леммы 2.

$$\int_0^x \int_0^y (s+1)^{-\alpha} (t+1)^{-\beta} \, ds \, dt \left| \int_{x-s}^{\infty} \int_0^{\infty} b(u, v) \, du \, dv \right| =$$

$$= O(1) \int_0^x \int_0^y (s+1)^{-\alpha} (t+1)^{-\beta} (x-s+1)^{-\gamma} \, ds \, dt =$$

$$= O(1) + O(1) \, (y+1)^{1-\beta} \int_0^x (s+1)^{-\alpha} (x-s+1)^{-\gamma} \, ds = O(1),$$

если учесть $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 2$, $\alpha + \beta \geqslant 1$, $\beta + \gamma > 1$, равенство (*) и то, что $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \lambda$.

Значит, $\lim\limits_{(x, y)_\lambda \to \infty} r_2 = 0$. Из условий 4° и 5° в этом пункте были использованы условия $\alpha + \gamma > 1$, $\beta + \gamma > 1$, $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 2$, $\alpha + \beta \geqslant 1$, $\alpha > 0$.

3) Доказательство $\lim\limits_{(x, y)_\lambda \to \infty} r_3 = 0$ аналогично рассуждениям пункта 2). Из условий 4° и 5° используются $\beta + \delta > 1$, $\alpha + \delta > 1$, $\alpha + \beta + \delta \geqslant 2$, $\alpha + \beta \geqslant 1$, $\beta > 0$.

Доказательство завершено.

Замечание 2. Условия 4° и 5° теоремы 2 нельзя ослабить.

1) Условие $\beta+\gamma>1$. Пусть $b(u,v)=2/3\,(u+2)\ln^{1,5}(u+2)\,(v+1)^4$. Здесь $\gamma=0$ и $\delta>2$. Рассмотрим только такие $a(s,t)$, для которых $\alpha=2$ и $\beta=1$. Тогда все условия 4° и 5°, кроме $\beta+\gamma>1$, выполнены. Значит, $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_1=0$ и $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} r_3=0$. Но

$$r_2=\int_0^x\int_0^y [(s+1)^2(t+1)a(s,t)][(s+1)^2(t+1)\ln^{0,5}(x-s+2)]^{-1}\,ds\,dt.$$

Если и $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_2=0$ для всех $(s+1)^2(t+1)a(s,t)=o(1)$, то должно выполняться условие 2° леммы 2

$$\lim_{(x,y)_\lambda\to\infty}\int_0^a\int_0^y [(s+1)^2(t+1)\ln^{0,5}(x-s+2)]^{-1}\,ds\,dt=0,$$

которое, очевидно, не удовлетворяется.

2) Условие $\alpha+\beta+\gamma\geqslant 2$. Пусть $b(u,v)=\frac{\varepsilon}{3}(u+1)^{-1-\varepsilon}(v+1)^{-4}$.

Здесь $\delta>2$, $\gamma=\varepsilon'$, где $0,5<\varepsilon'<\varepsilon<1$. Рассмотрим только такие $a(s,t)$, для которых $\alpha=\beta=0,5$. Все условия 4° и 5°, кроме $\alpha+\beta+\gamma\geqslant 2$, выполнены. Покажем, что найдется $a(s,t)$, при котором $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_2\neq 0$. Действительно,

$$r_2=\int_0^x\int_0^y [(s+1)^{0,5}(t+1)^{0,5}a(s,t)]\,[(s+1)^{0,5}(t+1)^{0,5}(x-s+1)^{\varepsilon}]^{-1}\,ds\,dt,$$

и, если $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_2=0$ при всех соответствующих $a(s,t)$, то должно выполняться необходимое условие 3° леммы 2. Но

$$\int_0^x\int_0^y [(s+1)^{0,5}(x-s+1)^{\varepsilon}(t+1)^{0,5}]^{-1}\,ds\,dt=O(1)+2(y+1)^{0,5}\times$$

$$\times\int_0^x[(s+1)^{0,5}(x-s+1)^{\varepsilon}]^{-1}ds\geqslant O(1)+2(y+1)^{0,5}[(x+1)^{-\varepsilon}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{x}{2}}(s+1)^{-0,5}ds+(x+1)^{-0,5}\int_{\frac{x}{2}}^{x}(x-s+1)^{-\varepsilon}ds]=$$

$$=O(1)+2(y+1)^{0,5}(x+1)^{-0,5}\left(\frac{x}{2}+1\right)^{1-\varepsilon}[2^{1-\varepsilon}(x+2)^{\varepsilon}(x+1)^{-\varepsilon}-$$

$$-1/1-\varepsilon]\to+\infty \text{ при } (x,y)_\lambda\to\infty.$$

3) Условие $\alpha+\beta>1$. Пусть $b(u,v)=1/4(u+1)^3(v+1)^3$. Рассмотрим только такие $a(s,t)$, для которых $\alpha=0{,}5-\varepsilon$ и $\beta=0{,}5-\varepsilon$, где ε сколь угодно малое положительное число. Все условия 4° и 5°, кроме $\alpha+\beta\geqslant 1$, выполнены. Так как

$$r_2=\int_0^x\int_0^y [(s+1)^{0,5-\varepsilon}(t+1)^{0,5-\varepsilon}a(s,t)][(x-s+1)^2\times$$

$$\times(s+1)^{0,5-\varepsilon}(t+1)^{0,5-\varepsilon}]^{-1}ds\,dt,$$

то, если бы $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_2=0$ для всех соответствующих $a(s,t)$, то должно было бы выполняться условие 3° леммы 2. Но

$$\int_0^x\int_0^y [(x-s+1)^2(s+1)^{0,5-\varepsilon}(t+1)^{0,5-\varepsilon}]^{-1}ds\,dt=$$

$$=O(1)+(0{,}5+\varepsilon)^{-1}(y+1)^{0,5+\varepsilon}\int_0^x (x-s+1)^{-2}(s+1)^{\varepsilon-0,5}ds\geqslant$$

$$\geqslant O(1)+O(1)(y+1)^{0,5+\varepsilon}(x+1)^{\varepsilon-0,5}\to\infty \text{ при } (x,y)_\lambda\to\infty.$$

Значит, существует функция $a(s,t)$, при которой $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_2\neq 0$. При функции $|a(s,t)|$, очевидно, и $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty}(r_1+r_2)\neq 0$.

4) Условие $\alpha>0$. Пусть $b(u,v)=1/16(u+1)^5(v+1)^5$. Рассмотрим такие $a(s,t)$, для которых $\alpha=0$ и $\beta=1$. Тогда

$$r_2=\int_0^x\int_0^y [(t+1)a(s,t)][(x-s+1)^{-4}(t+1)^{-1}]ds\,dt.$$

Если $\lim\limits_{(x,y)_\lambda\to\infty} r_2=0$ при всех $a(s,t)$, то по условию 1° леммы 2 должно выполняться

$$\lim_{(x,y)_\lambda\to\infty}\int_0^x\int_0^b (x-s+1)^{-4}(t+1)^{-1}ds\,dt=0,$$

которое, очевидно, не удовлетворяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г., Расходящиеся ряды, М., 1951.
2. Третьяков В. П., Изв. Высш. уч. зав. Матем., 5 (24), 78—85 (1961).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 10/I 1966

F. VICHMANN

INTEGRAALIDE FORMAALSEST KORRUTAMISEST

G. Hardy' monograafias "Divergent Series" [1] on esitatud teoreem 175 ridade formaalsest korrutamisest: kui $a_n = o\ (1)$ ja $\Sigma n|b_n| < \infty$, siis ridade Σa_n ja Σb_n Cauchy' korrutis on võrdkoonduv reaga $B\Sigma a_n$. Käesolevas artiklis on see tulemus üldistatud harilike ja kahekordsete Riemanni integraalide korral.

F. VICHMANN

ON FORMAL MULTIPLICATION OF INTEGRALS

In the monograph by G. Hardy "Divergent Series" [1] the theorem 175 is given about the formal multiplication of series: if $a_n = o(1)$ and $\Sigma n|b_n| < \infty$, then Cauchy's product of series Σa_n and Σb_n is equiconvergent with $B\Sigma a_n$. In this paper a generalization is given in the case of ordinary and double Riemann integrals.