EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.1.04

В. ПОЛЛЬ

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ НАХОЖДЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Рассмотрим вещественную функцию

$$y = f(x), \tag{1}$$

где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Обозначаем в дальнейшем:

$$x' = (u_1, u_2, \ldots, u_n); \quad x'' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$x''' = (w_1, w_2, \ldots, w_n); \quad x^{\mathrm{IV}} = (z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

В статье С. Ульма [1] для функции (1) были построены разделенные разности первого и второго порядков.

Введем для них следующие обозначения:

а) разделенные разности первого порядка

$$\begin{aligned} &F_1(x'; x'') = (a_i^1)_{i=1,2,\ldots,n} \\ &F_2(x'; x'') = (a_i^2)_{i=1,2,\ldots,n} = (a_i^1)^{(u\to v;\ v\to u)}_{i=1,2,\ldots,n}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$a_i^1 = f(v_1^{i-1}; u_i v_i; u_{i+1}^n)^*; \tag{3}$$

u_{i+1}^n обозначает последовательность $u_{i+1}, \ldots, u_n$; символ $u \to v$ означает, что в выражении (3) координаты вектора x'' следует заменить соответствующими координатами вектора x' и т. д.

Соотношения, связывающие разделенные разности первого порядка (2) со значениями функции (1), имеют следующий вид:

$$F_1(x'; x'')(x' - x'') = f(x') - f(x'')$$

$$F_2(x'; x'')(x' - x'') = f(x') - f(x'').$$

* См. [1].

б) разделенные разности второго порядка

$$
\begin{aligned}
F_{11}(x'; x''; x''') &= (a_{ij}^{11})_{\,i,j=1,2,\ldots,n} \\
F_{12}(x'; x''; x''') &= (a_{ij}^{12})_{\,i,j=1,2,\ldots,n} = (a_{ji}^{11})_{\,i,j=1,2,\ldots,n} \\
F_{21}(x'; x''; x''') &= (a_{ij}^{21})_{\,i,j=1,2,\ldots,n} = (a_{ji}^{11})^{(u\to v;\ v\to w;\ w\to u)}_{\,i,j=1,2,\ldots,n} \\
F_{22}(x'; x''; x''') &= (a_{ij}^{22})_{\,i,j=1,2,\ldots,n} = (a_{ij}^{11})^{(u\to w;\ w\to v;\ v\to u)}_{\,i,j=1,2,\ldots,n}\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$
a_{ij}^{11} = \begin{cases} f(w_1^{i-1};\, v_i w_i;\, v_{i+1}^{j-1};\, u_j v_j;\, u_{j+1}^{n})^{*}, & \text{если } i < j \\ f(w_1^{i-1};\, v_i u_i w_i;\, u_{i+1}^{n})^{**}, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i > j. \end{cases}
$$

При этом разделенные разности второго порядка (4) выражаются через разделенные разности первого порядка (2) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
F_{11}(x'; x''; x''')\,(x' - x'') &= F_1(x'; x''') - F_1(x''; x''') \\
F_{12}(x'; x''; x''')\,(x'' - x''') &= F_1(x'; x'') - F_1(x'; x''') \\
F_{21}(x'; x''; x''')\,(x' - x'') &= F_2(x'; x''') - F_2(x''; x''') \\
F_{22}(x'; x''; x''')\,(x'' - x''') &= F_2(x'; x'') - F_2(x'; x''').
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. Аналогичным образом можно для функции (1) построить разделенные разности третьего и высших порядков. Они выражаются через пространственные матрицы **.

Например, несимметрические разделенные разности третьего порядка $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})$ можно определить следующими шестью соотношениями:

1) $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\,(x' - x^{\mathrm{IV}}) = F(x'; x''; x''') - F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})$

2) $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\,(x' - x''') = F(x'; x''; x^{\mathrm{IV}}) - F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})$

3) $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\,(x'' - x^{\mathrm{IV}}) = F(x'; x''; x''') - F(x'; x'''; x^{\mathrm{IV}})$

4) $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\,(x' - x'') = F(x'; x'''; x^{\mathrm{IV}}) - F(x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})$

5) $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\,(x'' - x''') = F(x'; x''; x^{\mathrm{IV}}) - F(x'; x'''; x^{\mathrm{IV}})$

6) $F(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}})\,(x''' - x^{\mathrm{IV}}) = F(x'; x''; x''') - F(x'; x''; x^{\mathrm{IV}})$.

Для функции (1) легко построить разделенные разности третьего порядка на основании соотношений 4), 5) и 6). Обозначим их так:

$$
F_{rst}(x'; x''; x'''; x^{\mathrm{IV}}) = (a_{ijk}^{rst})_{\,i,j,k=1,2,\ldots,n}\,; \quad t = 1, 2, 3;\ (r, s = 1, 2).
$$

---

* См. [1].

** При этом произведение пространственной матрицы $(a_{ijk})_{i,j,k=1,\ldots,n}$ с вектором $h = (h_1, \ldots, h_n)'$ определяется равенством

$$
(a_{ijk})h = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} h_j\Big)_{i,k=1,2,\ldots,n}.
$$

Следовательно, исходя из выражений (4), получим 12 различных разностей третьего порядка. А именно:

$$
\begin{array}{lll}
F_{111}=(a_{ijk}^{111}) & F_{211}=(a_{ijk}^{211})=(a_{jki}^{111}) & {\scriptstyle (u\to v;\ v\to w;\ w\to z;\ z\to u)} \\
F_{112}=(a_{ijk}^{112})=(a_{ikj}^{111}) & F_{212}=(a_{ijk}^{212})=(a_{jik}^{111}) & {\scriptstyle (u\to v;\ v\to w;\ w\to z;\ z\to u)} \\
F_{113}=(a_{ijk}^{113})=(a_{jki}^{111}) & F_{213}=(a_{ijk}^{213})=(a_{kji}^{111}) & {\scriptstyle (u\to w;\ w\to u;\ v\to z;\ z\to v)} \\
F_{121}=(a_{ijk}^{121})=(a_{kji}^{111}) & F_{221}=(a_{ijk}^{221})=(a_{kij}^{111}) & {\scriptstyle (u\to w;\ w\to u;\ v\to z;\ z\to v)} \\
F_{122}=(a_{ijk}^{122})=(a_{kij}^{111}) & F_{222}=(a_{ijk}^{222})=(a_{ijk}^{111}) & {\scriptstyle (u\to z;\ z\to w;\ w\to v;\ v\to u)} \\
F_{123}=(a_{ijk}^{123})=(a_{jik}^{111}) & F_{223}=(a_{ijk}^{223})=(a_{ikj}^{111}) & {\scriptstyle (u\to z;\ z\to w;\ w\to v;\ v\to u)}
\end{array}, \tag{6}
$$

где

$$
a_{ijk}^{111}=\begin{cases}
f(z_1^{k-1};\ w_k z_k v_k;\ v_{k+1}^{j-1};\ u_j v_j;\ u_{j+1}^{n}) & \text{, если } j>k;\ k=i \\
f(z_1^{k-1};\ u_k w_k z_k v_k;\ u_{k+1}^{n}) & \text{, если } i=j=k \\
f(z_1^{i-1};\ w_i z_i;\ w_{i+1}^{k-1};\ u_k w_k v_k;\ u_{k+1}^{n}) & \text{, если } k>i;\ k=j \\
f(z_1^{i-1};\ w_i z_i;\ w_{i+1}^{k-1};\ v_k w_k;\ v_{k+1}^{j-1};\ u_j v_j;\ u_{j+1}^{n}) & \text{, если } j>k>i \\
0 & \text{в остальных случаях.}
\end{cases}
$$

Здесь

$$
f(\ldots;\ w_k z_k v_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)=[w_k-v_k]^{-1}\,[f(\ldots;\ w_k z_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)-
$$

$$
-f(\ldots;\ z_k v_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)]=[u_j-v_j]^{-1}\,[f(\ldots;\ w_k z_k v_k;\ \ldots;\ u_j;\ \ldots)-
$$

$$
-f(\ldots;\ w_k z_k v_k;\ \ldots;\ v_j;\ \ldots)]
$$

$$
f(\ldots;\ u_k w_k z_k v_k;\ \ldots)=[u_k-v_k]^{-1}\,[f(\ldots;\ u_k w_k z_k;\ \ldots)-f(\ldots;\ w_k z_k v_k;\ \ldots)]
$$

$$
f(\ldots;\ w_i z_i;\ \ldots;\ v_k w_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)=
$$

$$
=[u_j-v_j]^{-1}\,[f(\ldots;\ w_i z_i;\ \ldots;\ v_k w_k;\ \ldots;\ u_j;\ \ldots)-
$$

$$
-f(\ldots;\ w_i z_i;\ \ldots;\ v_k w_k;\ \ldots;\ v_j;\ \ldots)]=
$$

$$
=[v_k-w_k]^{-1}\,[f(\ldots;\ w_i z_i;\ \ldots;\ v_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)-
$$

$$
-f(\ldots;\ w_i z_i;\ \ldots;\ w_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)]=
$$

$$
=[w_i-z_i]^{-1}\,[f(\ldots;\ w_i;\ \ldots;\ v_k w_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)-
$$

$$
-f(\ldots;\ z_i;\ \ldots;\ v_k w_k;\ \ldots;\ u_j v_j;\ \ldots)].
$$

Разделенные разности третьего порядка (6) выражаются через разделенные разности второго порядка (4) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&F_{rs1}(x';\ x'';\ x''';\ x^{\mathrm{IV}})\,(x'-x'')=F_{rs}(x';\ x''';\ x^{\mathrm{IV}})-F_{rs}(x'';\ x''';\ x^{\mathrm{IV}})\\
&F_{rs2}(x';\ x'';\ x''';\ x^{\mathrm{IV}})\,(x''-x''')=F_{rs}(x';\ x'';\ x^{\mathrm{IV}})-F_{rs}(x';\ x''';\ x^{\mathrm{IV}})\\
&F_{rs3}(x';\ x'';\ x''';\ x^{\mathrm{IV}})\,(x'''-x^{\mathrm{IV}})=F_{rs}(x';\ x'';\ x''')-F_{rs}(x';\ x'';\ x^{\mathrm{IV}})
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
(r,\ s=1,\ 2).
$$

3. Предположим, что

а) существует стационарная точка x^* для функции (1);

б) имеется три приближения к точке x^*: $x^{(n)}, x^{(n-1)}$ и $x^{(n-2)}$.

Используя равенства $F_1(x^*; x^*) = F_2(x^*; x^*) = 0$ (см. [1]) и соотношения (5), можно вывести для нахождения стационарных точек функции (1) ряд различных методов. Исходим из выражения

$$0 = F_1(x^*; x^*) = F_1(x^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_1(x^*; x^*) - F_1(x^{(n)}; x^*) + \\ + F_1(x^{(n)}; x^*) - F_1(x^{(n)}; x^{(n-1)}) = \\ = F_1(x^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_{11}(x^{(n)}; x^*; x^*)(x^* - x^{(n)}) + \\ + F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^*)(x^* - x^{(n-1)}) = \\ = F_1(x^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_{11}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)})(x^* - x^{(n)}) + \\ + F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)})(x^* - x^{(n-1)}) + R(x^*; x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)}),$$

где

$$R = [F_{11}(x^{(n)}; x^*; x^*) - F_{11}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)})](x^* - x^{(n)}) + \\ + [F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^*) - F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)})](x^* - x^{(n-1)}).$$

Введем обозначение $F(x^{(n)}; x^{(n-1)}; \ldots) = F^{n, n-1, \ldots}$.

Используя приближенное равенство

$$F_1^{n, n-1} + F_{11}^{n, n-1, n-2}(x^* - x^{(n)}) + F_{12}^{n, n-1, n-2}(x^* - x^{(n-1)}) = 0, \tag{8}$$

получим следующий итерационный метод (решая (8) относительно x^* и принимая $x^* = x^{(n+1)}$):

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{11}^{n, n-1, n-2} + F_{12}^{n, n-1, n-2}]^{-1}[F_1^{n, n-1} + F_{12}^{n, n-1, n-2}(x^{(n)} - x^{(n-1)})]. \tag{9}$$

Легко получить еще три аналогичных метода:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{11}^{n, n-1, n-2} + F_{12}^{n, n-1, n-2}]^{-1}[F_2^{n, n-1} + F_{11}^{n, n-1, n-2}(x^{(n)} - x^{(n-1)})] \tag{10}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{21}^{n, n-1, n-2} + F_{22}^{n, n-1, n-2}]^{-1}[F_1^{n, n-1} + F_{21}^{n, n-1, n-2}(x^{(n)} - x^{(n-1)})] \tag{11}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{21}^{n, n-1, n-2} + F_{22}^{n, n-1, n-2}]^{-1}[F_2^{n, n-1} + F_{22}^{n, n-1, n-2}(x^{(n)} - x^{(n-1)})]. \tag{12}$$

Если исходить из двух приближений $x^{(n)}$ и $x^{(n-1)}$ и за третье приближение принять

$$y^{(n)} = \alpha x^{(n)} + (1 - \alpha) x^{(n-1)} \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad \text{(см. [2])},$$

то легко получить следующий итерационный метод:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F_{11}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)}) + F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})]^{-1} \times$$
$$\times [F_1(x^{(n)}; y^{(n)}) + F_{12}(x^{(n)}; y^{(n)}; x^{(n-1)})(x^{(n)} - y^{(n)})]. \qquad (13)$$

Наряду с методом (13) можно выписать и три аналогичных метода, соответствующих методам (10), (11) и (12).

Методы (9) и (13) представляют собой обобщения соответствующих методов Шмидта [2] на функции нескольких переменных.

4. Рассмотрим сходимость приведенных в предыдущем пункте итерационных методов (9) и (13) (модификации этих методов имеют такие же характеристики сходимости) в пространстве с нормой $\|x\| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$, т. е. в пространстве m_n.

Сначала рассмотрим метод (9). Легко видеть, что

$$x^* - x^{(n+1)} = -[F_{11}^{n,n-1,n-2} + F_{12}^{n,n-1,n-2}]^{-1} R(x^*; x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)}).$$

Так как

$$R = [F_{11}(x^{(n)}; x^*; x^*) - F_{11}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^*) +$$
$$+ F_{11}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^*) - F_{11}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)})](x^* - x^{(n)}) +$$
$$+ [F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^*) - F_{12}(x^{(n)}; x^{(n-1)}; x^{(n-2)})](x^* - x^{(n-1)}),$$

то на основании соотношений (7) $\|R\|$ легко оценивается.

Предположим, что функция (1) — трижды непрерывно дифференцируемая, причем

$$\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right| \leqslant f_{ijk} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14)$$

(в некоторой области из m_n). Тогда можно показать [3], что

$$|f(\ldots; u_i v_i w_i z_i; \ldots)| \leqslant \frac{1}{6} f_{iii}$$
$$|f(\ldots; u_i v_i; \ldots; v_j w_j z_j; \ldots)| \leqslant \frac{1}{2} f_{ijj} \qquad (15)$$
$$|f(\ldots; u_i v_i; \ldots; v_j w_j; \ldots; w_k z_k; \ldots)| \leqslant f_{ijk}.$$

Учитывая неравенства (15) и соотношения (6) и (7), имеем

$$\|R\| \leqslant (b\|x^* - x^{(n-1)}\| + c\|x^* - x^{(n-2)}\|)\|x^* - x^{(n)}\| +$$
$$+ f\|x^* - x^{(n-2)}\| \, \|x^* - x^{(n-1)}\|,$$

где

$$b = \max_{i=1,\ldots,n} [\sum_{k=i+1}^{n} (\sum_{j=i+1}^{k-1} f_{ijk} + \frac{1}{2} f_{iik} + \frac{1}{2} f_{ikk}) + \frac{1}{6} f_{iii}]$$

$$c = \max_{i=1,\ldots,n} [\sum_{k=i+1}^{n} (\sum_{j=1}^{i-1} f_{jik} + \frac{1}{2} f_{iik}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} f_{jii} + \frac{1}{6} f_{iii}]$$

$$f = \max_{i=1,\ldots,n} [\sum_{k=1}^{i-1} (\sum_{j=1}^{k-1} f_{jki} + \frac{1}{2} f_{kki}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} f_{jii} + \frac{1}{6} f_{iii}].$$

Далее предположим, что

$$\|[F_{11}(x'; x''; x''') + F_{12}(x'; x''; x''')]^{-1}\| \leqslant p \tag{16}$$

для всех x', x'', x''', принадлежащих к некоторой области пространства m_n. Тогда имеем

$$\|x^* - x^{(n+1)}\| \leqslant A\|x^* - x^{(n)}\| \, \|x^* - x^{(n-1)}\| + B\|x^* - x^{(n)}\| \, \|x^* - x^{(n-2)}\| + C\|x^* - x^{(n-1)}\| \, \|x^* - x^{(n-2)}\|$$

или

$$d_{n+1} \leqslant A\, d_n d_{n-1} + B\, d_n d_{n-2} + C\, d_{n-1} d_{n-2}, \tag{17}$$

где

$$A = pb; \qquad d_i = \|x^* - x^{(i)}\| \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots).$$
$$B = pc;$$
$$C = pf.$$

Аналогично получим для метода (13) следующую оценку:

$$\|x^* - x^{(n-1)}\| \leqslant K\|x^* - x^{(n)}\|^2 + L\|x^* - x^{(n)}\| \, \|x^* - x^{(n-1)}\| + M\|x^* - x^{(n-1)}\|^2$$

или

$$d_{n+1} \leqslant K d_n^2 + L\, d_n d_{n-1} + M\, d_{n-1}^2, \tag{18}$$

где

$$K = \alpha\, pb = \alpha A$$
$$L = p[c + \alpha f + (1-\alpha) b] = B + \alpha C + (1-\alpha) A$$
$$M = (1-\alpha) pf = (1-\alpha) C.$$

Покажем теперь, что скорости сходимости методов (9) и (13) останутся такими же, как у аналогичных методов Шмидта [2].

Рассмотрим метод (9).

Теорема 1. *Пусть*

1° *функция* (1) *имеет стационарную точку* x^* *в сфере* $S(x^{(0)}; d) \subset m_n$;

2° $\|x^* - x^{(1)}\| \leqslant d$, $\|x^* - x^{(2)}\| \leqslant d$;

3° *в сфере* $S(x^*; d) \subset m_n$ *имеют место неравенства* (14) *и* (16);

4° $(A + B + C) d = Fd < 1$.

Тогда последовательность (9) *сходится к стационарной точке* x^*, *причем*

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leqslant \frac{1}{F} (Fd)^{\mu_n} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{19}$$

где

$$\mu_n = \mu_{n-2} + \mu_{n-3} \qquad (n \geqslant 3) \tag{20}$$

$$\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1. \tag{21}$$

Доказательство. Учитывая 1°, 2° и 4°, имеем, что $d_0,\ d_1,\ d_2 \leqslant d$. Следовательно, имеет место (21).

Доказательство (20) проводим индуктивно, исходя из неравенства (17).

$$d_3 \leqslant A\, d_2 d_1 + B\, d_2 d_0 + C\, d_1 d_0 \leqslant F d^2 =$$

$$= \frac{1}{F}\,(Fd)^2 = \frac{1}{F}\,(Fd)^{\mu_3}$$

$$d_4 \leqslant A\, d_3 d_2 + B\, d_3 d_1 + C\, d_2 d_1 \leqslant F d^2 =$$

$$= \frac{1}{F}\,(Fd)^2 = \frac{1}{F}\,(Fd)^{\mu_4}.$$

Предположим, что для всех индексов $\leqslant n-1$ имеют место оценки (19). Докажем, что они имеют место и для n $(\geqslant 5)$:

$$d_n \leqslant A\, d_{n-1} d_{n-2} + B\, d_{n-1} d_{n-3} + C\, d_{n-2} d_{n-3} \leqslant$$

$$\leqslant A F^{\mu_{n-1}+\mu_{n-2}-2}\, d^{\mu_{n-1}+\mu_{n-2}} + B\, F^{\mu_{n-1}+\mu_{n-3}-2}\, d^{\mu_{n-1}+\mu_{n-3}} +$$

$$+ C\, F^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}-2}\, d^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}} =$$

$$= [A\,(Fd)^{\mu_{n-1}-\mu_{n-3}} + B\,(Fd)^{\mu_{n-1}-\mu_{n-2}} + C] \times$$

$$\times F^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}-2}\, d^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}} \leqslant$$

$$\leqslant (A+B+C)\, F^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}-2}\, d^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}} =$$

$$= F^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}-1}\, d^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}} = \frac{1}{F}\,(Fd)^{\mu_{n-2}+\mu_{n-3}} = \frac{1}{F}\,(Fd)^{\mu_n},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Общим решением (20) является

$$\mu_n = c_0 r_0^n + c_1 r_1^n + c_2 r_2^n, \tag{22}$$

где

$$r_0 = \sqrt[3]{0{,}5 + \sqrt{23/108}} + \left(3\sqrt[3]{0{,}5 + \sqrt{23/108}}\right)^{-1} = 1{,}32\ldots;$$

$$|r_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{r_0}}.$$

Учитывая (22) и начальные условия (21), получим следующую оценку:

$$d_n \leqslant \frac{1}{F}\,(Fd)^{c_0 r_0^n (1+\varepsilon_n)}, \quad \text{где } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \ (\text{см. [4]}) \ \text{и} \ c_0 = \frac{r_0 + r_0^2 + 1}{2r_0^3 + 1}.$$

Следовательно, метод (9) *имеет порядок сходимости* $r_0 = 1{,}32\ldots$.

Теорема 2. *Пусть*

1° *функция* (1) *имеет стационарную точку* $x^* \in S(x^{(0)}; d) \subset m_n$;

2° $\|x^* - x^{(1)}\| \leqslant d$;

3° *в сфере* $S(x^*; d) \subset m_n$ *имеют место* (14) *и* (16);

4° $(K + L + M)d = (A + B + C)d = Fd < 1$.

Тогда последовательность (13) *сходится к* x^*, *причем*

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leqslant \frac{1}{F}\,(Fd)^{\nu_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{23}$$

где

$$\nu_n = 2\nu_{n-2} \quad (n \geqslant 2),$$

$$\nu_0 = \nu_1 = 1. \tag{24}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 2. Решением разностного уравнения (24) является

$$\nu_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\,(-\sqrt{2})^n.$$

Поэтому имеем следующую оценку:

$$d_n \leqslant \frac{1}{F}\,(Fd)^{c_1(\sqrt{2})^n(1+\varepsilon_n')}, \text{ где } \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n' = 0 \text{ и } c_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно, метод (13) *имеет порядок сходимости* $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$.

Теоремы существования стационарной точки для функции (1) и более точные оценки погрешности итерационных методов типа (9) и (13) будут опубликованы в следующих выпусках данного журнала.

5. Численный пример

На ЭЦВМ «Минск-2» были проведены численные эксперименты с методами (9) и (13). Последние предпочтительнее методов типа (11) и (12), поскольку матрица $F_{11} + F_{12}$ является симметрической, а матрица $F_{21} + F_{22}$ не симметрическая.

Для проведения расчетов была взята простая функция двух переменных:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^3 - 0{,}5x_2^4 - 5x_1^2x_2^2 + 2x_1^2 + 30x_2^2 + 76x_2 + 1,$$

которая имеет стационарную точку

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2 \quad \text{с} \quad f(3, 2) = 211.$$

Результаты расчета приведены в нижеследующей таблице (процесс итерации прекратился, когда $\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leqslant 2^{-12} \approx 0{,}0002$):

n	Метод (9)			Метод (13): $\alpha = 0,5$		
	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	3,8	1,9	234,90995	3,8	1,9	234,90995
1	3,5	3,0	103,2500	$\left(\frac{3,8+5,0}{2}=4,4\right)$	$\left(\frac{1,9+4,0}{2}=2,95\right)$	(60,46475)
2	5,0	4,0	—793,0000	5,0	4,0	—793,0000
3	3,132489	2,514162	194,1797	3,142706	2,633892	186,5549
4	3,216697	2,269916	202,0745	3,592920	2,340197	186,0135
5	3,239166	2,130424	207,5967	3,025429	2,054132	210,7638
6	3,015988	2,015561	210,9680	3,050858	2,017924	210,9275
7	3,014535	2,004038	210,9963	3,000455	2,000345	210,9999
8	3,001617	2,000432	210,9999	3,000312	2,000055	211,0000
9	3,000044	2,000007	210,9999	3,000229	1,999934	211,0000
10	2,999998	2,000004	211,0000			

Следует отметить, что число значений функций, которые требуется вычислить на одном шаге итерационного процесса, равняется:

а) для метода (9) $\frac{n(n+1)}{2}$ (на первом шаге $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$);

б) для метода (13) $\frac{n(n+3)}{2}$ (на первом шаге $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем. См. настоящий номер журнала, стр. 13—26.
2. Schmidt J. W., Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, **12**, Nr. 6, 1601—1605 (1963).
3. Kunz K. C., Numerical Analysis, New York—Toronto—London, 1957.
4. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., **43**, Nr. 3, 97—110 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/IV 1966

V. POLL

MITMEMUUTUJA FUNKTSIOONIDE STATSIONAARSETE PUNKTIDE LEIDMISE MEETODITEST

Konstrueeritakse mitmemuutuja funktsiooni jaoks kolmandat järku diferentssuhted. Üldistatakse J. W. Schmidti [2] poolt esitatud algoritme mitmemuutuja funktsioonidele ja näidatakse, et üldistatud algoritmidel (9) ja (13) on sama koonduvuskiirus mis algoritmidel ühe muutuja funktsiooni jaoks. Tuuakse numbriline näide.

V. POLL

ON SOME METHODS FOR FINDING STATIONARY VALUES OF A FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES

This paper deals with the construction of the divided differences of the third order for a function of several variables. The Schmidt's methods [2] for finding stationary values of a function of one variable are extended to functions of several variables. It is proved that the methods (9) and (13) have the same convergence rate as the Schmidt's methods. A numerical illustration is given.