EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.1.03

И. ПЕТЕРСЕН

ЛОКАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОСНОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Предлагается учитывать неодинаковую точность регрессионной модели в различных направлениях при ее использовании в целях локальной оптимизации. Вместо продвижения в направлении градиента, определенного из регрессионного уравнения, рекомендуется продвигаться в таком направлении, где максимизируется прогнозируемое регрессионным уравнением значение оптимизируемой величины при добавочном условии, что дисперсия этой величины остается меньше нефиксированной постоянной. Соответствующее направление легко определяется статистическими данными и к нему сводится также ряд других подходов к проблеме локальной оптимизации на основании статистических данных.

Введение

При оптимизации процессов часто приходится использовать статистический материал опытов или наблюдений, условия которых не выбраны специально для построения математической модели процесса. Такое положение имеет место, когда входные параметры процесса не полностью управляемы или когда их целеустремленное изменение связано со слишком большими затратами. Для статистического материала в таких случаях характерно, что независимые переменные имеют малые области изменения и значительную корреляцию. Малость области изменения независимых переменных позволяет, с одной стороны, ограничиваться линейной моделью процесса, но, с другой стороны, влечет за собой быстрое падение статистической точности модели при удалении от центра данного статистического материала. При этом, благодаря коррелированности независимых переменных, это падение точности в различных направлениях различно — в таких направлениях, где в наблюдениях переменные мало изменились, точность модели уменьшается особенно быстро.

Стандартный подход к локальной оптимизации — определить по данному статистическому материалу линейную модель процесса в виде регрессионного уравнения и продвигаться в направлении градиента этого уравнения — в подобных случаях часто неприменим, так как полученная оценка градиента выхода слишком неточна по сравнению с величиной градиента. Статистическая проверка значимости увеличения выхода в направлении градиента в таком случае не подтверждает положительности приращения выхода. Если при этом градиент направлен в ту сторону, где регрессионное уравнение обладает сравнительно большей точностью, то данный статистический материал не позволяет (по меньшей мере на основании линейной модели) вообще обосновать изменения значений входов для увеличения выхода процесса. Но если полученная оценка градиента направлена в направлении меньшей точности модели, то может оказаться, что несмотря на незначимость увеличения выхода в направлении градиента в некоторых других направлениях это увеличение значимо. Эти направления отклонены от градиента в сторону большей точности модели — увеличение точности повы-

шает значимость оценки приращения выхода быстрее, чем ее уменьшает уменьшение самой оценки приращения выхода, вызванное удалением от направления градиента.

Практика исследования многих конкретных статистических материалов (так называемых нормальных режимов технологических процессов) показывает, что в подавляющем числе случаев таким путем удается повысить значимость оценки приращения выхода в несколько раз по сравнению со значимостью оценки приращения в направлении оценки градиента. По-видимому, это объясняется тем, что при таких процессах направления большей точности модели, т. е. те направления, в которых входы изменились шире, имеют тенденцию образовывать большой угол с направлением градиента, так как в противном случае входы процесса были бы уже изменены в направлении градиента без статистического анализа.

Точность линейной регрессионной модели определяется дисперсией оценки выхода, вычисленной из этой модели. Эта дисперсия является квадратичной формой от приращений независимых переменных. Поэтому, особенно в случае большого числа входов, проведение каждый раз детального исследования точности оценок выхода для разных комбинаций входов неудобно. Желательно иметь стандартный метод определения направления изменения входов с целью максимизации выхода, который учитывал бы по некоторому принципу неодинаковость точности модели в разных направлениях. Как следует из вышеизложенного, таким принципом может служить максимизация значимости оценки увеличения выхода, т. е. максимизация отношения оценки приращения выхода к оценке стандартного отклонения этого приращения. Ниже мы убедимся в том, что такой принцип приводит к легко определяемому направлению, обладающему вместе с тем и рядом других экстремальных свойств, которые в еще большей степени обосновывают использование в проблемах локальной оптимизации этого направления вместо направления оценки градиента.

§ 1. Направление максимальной значимости приращения выхода

Пусть рассматриваемый процесс имеет n входных параметров $x_1, \ldots, x_n$, образующих вектор-столбец $\mathbf{x}$, и один выходной параметр y. Допустим, что в рассматриваемой области изменения входов y является линейной функцией $\mathbf{x}$, т. е.

$$y = \beta_0 + \beta'\mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Проведено N наблюдений (опытов) со значениями входных параметров x_{ij} $(j = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, N)$ и с соответствующими значениями выхода y_i. Обозначим $N \times n$ матрицу центрированных значений входных параметров, через $\mathfrak{X}$ и $N \times 1$ — матрицу центрированных значений выхода через $\mathbf{У}$:

$$\mathfrak{X} = (x_{ij} - \bar{x}_{.j}), \quad \mathbf{У} = (y_i - \bar{y}), \tag{1.2}$$

где

$$\bar{x}_{.j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n), \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{1.3}$$

Предполагаем, что ошибки наблюдения при этом нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и с одинаковой дисперсией σ^2. Тогда метод наименьших квадратов дает [1] (при условии, что ранг матрицы $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}$ равен n) модель рассматриваемого процесса в виде

$$y = \bar{y} + \mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \tag{1.4}$$

где вектор $\mathbf{b}$ — оценка вектора β по наблюдениям $\mathfrak{X}$, $\mathbf{У}$ — определяется в виде

$$\mathbf{b} = (\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}\mathfrak{X}'\mathbf{У}, \tag{1.5}$$

причем математическое ожидание векторов $\mathbf{b}$, как случайного, есть β, а ее корреляционной матрицей является

$$\mathbf{C_b} = \sigma^2(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}. \tag{1.6}$$

Для некоторого конкретного значения $\mathbf{x}$ регрессионное уравнение (1.4) дает оценку приращения выхода

$$y - \bar{y} = \mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \tag{1.7}$$

с дисперсией

$$D(y - \bar{y}) = \sigma^2(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Значимость этого приращения проверяется по критерию

$$t = \frac{y - \bar{y}}{\sqrt{D(y - \bar{y})}} = \frac{\mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}{\sigma\sqrt{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}}. \tag{1.8}$$

Для максимизации выхода естественно определить изменения входов $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ так, чтобы отношение (1.8) принимало наибольшее значение.

Так как

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\frac{y - \bar{y}}{\sqrt{D(y - \bar{y})}} = [D(y - \bar{y})]^{-\frac{3}{2}}[D(y - \bar{y})\mathbf{b} - \sigma^2\mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})],$$

то (1.8) максимизируется в направлении

$$\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} = k\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{b} = k\mathfrak{X}'\mathbf{У}. \tag{1.9}$$

В этом направлении отношение (1.8) принимает значение

$$\frac{y - \bar{y}}{\sqrt{D(y - \bar{y})}} = \frac{b'\mathfrak{X}'\mathbf{У}}{\sigma\sqrt{(\mathfrak{X}'\mathbf{У})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathfrak{X}'\mathbf{У})}} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{У}}. \tag{1.10}$$

Если выражение (1.10) меньше соответствующей выбранной доверительной вероятности критического значения нормального или t-распределения (σ известно или оценивается на основании конечного числа степеней свободы), то данный статистический материал вообще не позволяет при таком уровне доверия на основании регрессионного уравнения (1.4) делать заключение об увеличении выхода при изменении параметров x.

Отметим также, что обратное значение выражения (1.8) можно интерпретировать как величину, пропорциональную относительной ошибке приращения выхода в направлении $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$. Следовательно, $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ является направлением с минимальной относительной ошибкой приращения выхода.

§ 2. Некоторые другие соображения, приводящие к направлению $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$

К заключению о целесообразности продвижения в направлении вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ при максимизации выхода y можно прийти, исходя еще из других соображений. Оценка $\mathbf{b}$ градиента является наилучшей оценкой направления, где скорость увеличения выхода максимальна. Но получаемое увеличение выхода зависит, кроме скорости изменения выхода, еще от того, как далеко мы можем продвигаться. Последнее естественно ограничить требованием, чтобы дисперсия прогнозируемого регрессионным уравнением значения выхода осталась меньше некоторой постоянной α^2. Таким образом задача безусловной максимизации оценки выхода по регрессионному уравнению естественно заменить задачей максимизации этой оценки при условии, что ее дисперсия меньше α^2. Для процесса это означает, что мы отдаем некоторое предпочтение тем направлениям, в которых входы процесса во время наблюдений больше изменились. Обычно именно в таких направлениях изменение входов легче осуществляется.

Поставленную задачу — максимизировать $y = \bar{y} + \mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ при условии, что

$$s_y^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{N} + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right] \leqslant \alpha^2 \tag{2.1}$$

— легко решить методом Лагранжа. В качестве решения получаем (при $\alpha^2 > \frac{\sigma^2}{N}$, что естественно)

$$\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{N\alpha^2 - \sigma^2}{N\sigma^2 b'\mathfrak{X}'\mathbf{У}}}\ \mathfrak{X}'\mathbf{У}. \tag{2.2}$$

Максимизация прогноза выхода при условии, что его дисперсия меньше нефиксированной постоянной приводит, следовательно, к продвижению от точки средних $\bar{\mathbf{x}}$ в том же направлении $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$, к которому сводится и рассмотренный в предыдущем параграфе подход.

Каждое направление $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ имеет определенную фидуциальную вероятность того, что в этом направлении приращение выхода положительно:

$$P(y - \bar{y} \geqslant 0) = \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(t - \mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))^2}{2\sigma^2(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}\right] dt. \tag{2.3}$$

Нетрудно убедиться, что эта вероятность как функция вектора $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ снова максимальна именно в направлении вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$. Таким образом, направление вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ в проблемах локальной оптимизации является и направлением наибольшей фидуциальной вероятности успеха.

§ 3. Максимум нижнего вероятностного предела

Для выбранной доверительной вероятности доверительные пределы выхода y являются функциями входов $\mathbf{x}$, в частности, нижний предел выражается [1] в виде

$$y_{\text{ниж}} = \bar{y} + \mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - t\sigma \sqrt{\frac{1}{N} + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}. \tag{3.1}$$

Так как нашей целью является максимизация выхода, то естественно интересоваться вопросом, обладает ли $y_{\text{ниж}}$ точкой максимума и, если обладает, то в каком направлении от точки $\bar{\mathbf{x}}$ она находится?

Приравнивая к нулю производную

$$\frac{dy_{\text{ниж}}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{b} - \frac{t\sigma}{\sqrt{\frac{1}{N} + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}} (\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \tag{3.2}$$

мы увидим, что если функция (3.1) имеет стационарную точку, то последняя находится на полупрямой

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + k\mathfrak{X}'\mathbf{Y} \qquad (k > 0). \tag{3.3}$$

На этой прямой $y_{\text{ниж}}$ является функцией параметра k:

$$y_{\text{ниж}}(k) = \bar{y} + k\mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{Y} - t\sigma \sqrt{\frac{1}{N} + k^2\mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{Y}}. \tag{3.4}$$

Приравнивая к нулю производную по k этой последней функции, мы окончательно получим, что функция (3.1) обладает стационарной точкой, если

$$\mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{Y} < t^2\sigma^2, \tag{3.5}$$

причем стационарной точкой является

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{N(t^2\sigma^2 - \mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{Y})}} \mathfrak{X}'\mathbf{Y}. \tag{3.6}$$

В этой стационарной точке

$$y_{\text{ниж}} = \bar{y} - \sqrt{\frac{t^2\sigma^2 - \mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{Y}}{N}}. \tag{3.7}$$

Подставляя $\mathbf{x}$ из (3.6) в выражение второй производной $\frac{d^2y_{\text{ниж}}}{d\mathbf{x}^2}$, мы увидим, что эта стационарная точка является точкой максимума $y_{\text{ниж}}$, если матрица

$$\mathbf{B} = t^2\sigma^2(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1} - \mathbf{b}\mathbf{b}' \tag{3.8}$$

положительно определенная. Из положительной определенности матрицы $\mathbf{B}$ следует (при $\mathfrak{X}'\mathbf{Y} \neq 0$), что

$$(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{b})'\,\mathbf{B}\,\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{b} > 0 \text{ или } (t^2\sigma^2 - \mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{b})\,\mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{b} > 0,$$

т. е. выполнение условия (3.5).

Мы пришли к следующему результату:

если матрица (3.8) положительно определенная, то нижний вероятностный предел (3.1) выхода y имеет точку максимума (3.6), которая

находится от точки средних $\bar{\mathbf{x}}$ в направлении вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$. Максимальное значение нижнего вероятностного предела (3.7) при этом всегда меньше среднего значения выхода $\bar{y}$, но больше его нижнего предела $\bar{y} - \frac{t\sigma}{\sqrt{N}}$.

§ 4. Некоторые другие свойства направления $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$

Приведем еще некоторые свойства вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$, связанные с использованием его в качестве направления продвижения в проблемах оптимизации.

Прежде всего отметим, что угол между векторами $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ и $\mathbf{b}$ всегда острый, так как

$$\mathbf{b}'\mathfrak{X}'\mathbf{У} = (\mathfrak{X}'\mathbf{У})'(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}\mathfrak{X}'\mathbf{У} \tag{4.1}$$

и $(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}$ — положительно определенная матрица.

Далее, направления векторов $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ и $\mathbf{b}$ совпадают тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ направлен по одному из собственных векторов матрицы $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}$. Действительно, из $\mathfrak{X}'\mathbf{У} = k\mathbf{b}$ или $\mathfrak{X}'\mathbf{У} = k(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ следует $(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})\mathfrak{X}'\mathbf{У} = k\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ и наоборот.

Направление вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$, в отличие от направления градиента $\mathbf{b}$, не зависит от масштабизации входных параметров. Действительно, если новые масштабы входов суть l_i, $\mathbf{L} = \operatorname{diag}(l_1, \ldots, l_n)$ и $\mathbf{z} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{x}$ — соответствующая формула преобразования, то в новых масштабах матрице $\mathfrak{X}$ соответствует матрица $\mathbf{Z} = \mathfrak{X}\mathbf{L}^{-1}$ и вектору $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ — вектор $\mathbf{Z}'\mathbf{У} = \mathbf{L}^{-1}\mathfrak{X}'\mathbf{У}$, который, однако, является и преобразованием к новым масштабам вектора $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$.

До сих пор мы предполагали, что ранг матрицы $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}$ равен числу входов n. Если ранг этой матрицы $m < n$, то метод наименьших квадратов непосредственно неприменим — $(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}$ не существует. Точки наблюдения находятся в таком случае на некоторой m-мерной плоскости π, проходящей через точку $\bar{\mathbf{x}}$. Векторы — строки матрицы $\mathfrak{X}$, а следовательно, и их линейная комбинация $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$, параллельны плоскости π. Репараметризацией процесса можно и в этом случае построить регрессионную модель, которая, однако, теперь относится только к точкам плоскости π. Нетрудно проверить, что для этой модели вектор $\mathfrak{X}'\mathbf{У}$ имеет прежний смысл — это направление максимальной значимости приращения выхода.

§ 5. Оптимизация при наличии линейных ограничений

В предыдущих параграфах изложен метод определения направления продвижения на основании наблюдений $\mathfrak{X}$, $\mathbf{У}$ для проблем безусловной максимизации выхода. Теперь рассмотрим, как применить аналогичный подход, если изменение входов ограничено линейными равенствами. К повторному применению этого случая можно свести также случай, когда среди ограничений имеются и неравенства.

Пусть входы $\mathbf{x}$ должны удовлетворять m линейным уравнениям

$$\mathbf{a}_i'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{5.1}$$

Без существенного ограничения общности можем считать, что векторы $\mathbf{a}_i'$ в этих уравнениях ортонормированы относительно метрики, определяемой матрицей $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}$:

$$\mathbf{a}_i'\,\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{a}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \tag{5.2}$$

Задачу максимизации выхода с учетом точности регрессионной модели сформулируем теперь следующим образом:

определить находящуюся на m плоскостях (5.1) точку, для которой прогнозируемое регрессионным уравнением (1.4) значение выхода принимало бы наибольшее значение при условии, что его дисперсия меньше заданной (2.1). Этой задаче соответствует функция Лагранжа

$$L = \mathbf{b}'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\mu}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X})^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}). \tag{5.3}$$

Приравниванием к нулю $\frac{dL}{d\mathbf{x}}$ и умножением слева на матрицу $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}$ получим

$$\mathfrak{X}'\mathbf{У} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{a}_i + \mu(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 0. \tag{5.4}$$

Отсюда на основании (5.2) находим

$$\lambda_i = -\mathbf{a}_i'\mathfrak{X}'\mathbf{У} - \mu c_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{5.5}$$

что вместе с (5.3) дает

$$\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} = -\frac{1}{\mu}\left[\mathfrak{X}'\mathbf{У} + \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{a}_i'\mathfrak{X}'\mathbf{У} - \mu c_i)\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{a}_i\right] \tag{5.6}$$

или

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{p} + s\mathbf{q}, \tag{5.7}$$

где

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{a}_i, \quad \mathbf{q} = \mathfrak{X}'\mathbf{У} + \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{a}_i'\mathfrak{X}'\mathbf{У})\mathfrak{X}'\mathfrak{X}\mathbf{a}_i, \tag{5.8}$$

а s — численный параметр. Для нефиксированного s уравнение (5.7) определяет прямую, находящуюся на m плоскостях (5.1). Поставленную задачу решает (если она имеет решение, т. е. если заданный предел дисперсии α^2 достаточно велик) точка пересечения этой прямой с эллипсоидом (2.1). Параметр s можно, однако, определить, исходя и из других соображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, М., 1958.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/III 1966

I. PETERSEN

LOKAALNE OPTIMISEERIMINE STATISTILISE MATERJALI ALUSEL

Protsesside optimiseerimisel tugevasti korreleeritud sisendparameetritega statistilise materjali kasutamise puhul tuleb arvesse võtta regressioonmudeli erinevat täpsust erinevates suundades. Artiklis socvitatakse lokaalset liikumist regressioonvõrrandi gradiendi suuna asemel suunas, mis maksimiseerib väljundi hinnangu tingimusel, et selle hinnangu dispersioon oleks väiksem spetsifitseerimata konstandist. Lineaarse mudeli puhul viib selline lähenemine liikumisele vektori $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}$ suunas, kus $\mathfrak{X}$ ja $\mathfrak{Y}$ on sisend- ja väljundparameetrite tsentreeritud väärtuste maatriksid antud statistilises materjalis. Näidatakse, et vektori $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}$ suunas on väljundi juurdekasvu hinnang maksimaalse statistilise olulisusega ning väljundi juurdekasvu positiivsuse fidutsiaalne tõenäosus maksimaalne. Tuletatakse tingimus väljundi hinnangu alumise tõenäosusliku tõkke maksimumkoha olemasoluks ning näidatakse, et see maksimumkoht asub keskmiste punktist samuti vektori $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}$ suunas. Soovitatud suund tuletatakse ka selle juhu jaoks, kui sisendparameetritele on seatud tingimused lineaarsete võrrandite kujul.

I. PETERSEN

LOCAL OPTIMIZATION BASED ON STATISTICAL DATA

The unequal precision of the regression model in different directions must be taken into account in optimizing processes with the use of statistical data with highly correlated inputs. Instead of the direction of the regression gradient for local movement, the author proposes a direction which maximizes the estimate of the output subject to the condition that its dispersion does not exceed an unspecified constant. In the case of a linear model, this approach leads to the movement in the direction of the vector $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}$, where $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are the matrices of centralized values of inputs and output in the given statistical material. It is shown that in the direction of $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}$ we also obtain the greatest significance of the output increase estimate and the greatest fiducial probability of the positivity of this increase. The condition is derived for the existence of the maximum point of the lower probability bound of the output estimate and it is shown that this point if it exists, is again in the direction of $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}$ from the central point. The proposed direction is also derived for the case of linear restrictions on inputs.