EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVI KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1967, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVI
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1967, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1967.1.02

С. УЛЬМ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЯХ. I

§ 1. Обобщенные разделенные разности первого порядка

Пусть $F(x)$ — непрерывный нелинейный оператор, переводящий линейное нормированное пространство X в пространство Y того же типа.

При обобщении различных итерационных методов (метода хорд, метода Стеффенсена и др.) * для решения нелинейного уравнения $F(x)=0$ необходимо обобщить понятия разделенных разностей для оператора $F(x)$.

Впервые, по-видимому, понятие обобщенной разделенной разности дано Ю. Шредером [16] в связи с составлением мажорантных уравнений для исследования сходимости некоторых итерационных процессов. Ю. Шредер определяет разделенную разность первого порядка оператора $F(x)$ как линейный оператор $F(x';x'')\in(X\to Y)$ (для каждых фиксированных $x', x''\in X$), причем

$$F(x';x'')(x'-x'')=F(x')-F(x''). \tag{1.1}$$

А. Сергеев [2, 5] отмечает, что определенная формулой (1.1) разделенная разность является слишком общей и поэтому полезно в конкретных случаях это понятие уточнить. Например, иногда нужно предположить, что оператор $F(x';x'')$ дополнительно удовлетворяет еще условиям:

а) $F(x';x'')=F(x'';x')$ (симметричность); (1.2)

б) для каждого функционала f (определен в пространстве Y) справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\{f[F(x'+t(x''-x');x')t(x-x')]\}_t'=\\&=f[F'(x'+t(x''-x'))\,(x-x')],\end{aligned} \tag{1.3}$$

где t — вещественный параметр.

Соотношение (1.3) А. Сергеев использует для установления оценки

$$\|F(x')-F(x'')-F(x''';x'')(x'-x'')\|\leqslant\tfrac{1}{2}N\|x'-x''\|\,\|x'-x'''\| \tag{1.4}$$

в предположении, что существует $F'(x)$, удовлетворявшая условие Липшица с постоянным N.

* Различные методы для решения нелинейного операторного уравнения $F(x)=0$ при помощи обобщенных разделенных разностей приведены в статьях [1–15].

И. Шмидт [1, 3, 4] требует дополнительно (1.1) выполнения следующих условий:

а)
$$\|F(x';x'')-F(x'';x''')\| \leqslant \\ \leqslant a\|x'-x''\|+b(\|x'-x''\|+\|x''-x'''\|); \tag{1.5}$$

б) если существует $F'(x)$, то

$$\|F'(x')-F(x';x'')\| \leqslant (a+b)\|x'-x''\|. \tag{1.6}$$

Соотношения (1.5) и (1.6) И. Шмидт использует для установления оценки

$$\|F(x')-F(x'')-F(x'';x''')(x'-x'')\| \leqslant \\ \leqslant [a\|x'-x'''\|+b(\|x'-x''\|+\|x''-x'''\|)]\,\|x'-x''\|. \tag{1.7}$$

А. Белостоцкий [17] определяет разделенную разность при помощи равенства

$$F(x';x'')=\int_0^1 F'[x''+t(x'-x'')]dt \in (X\to Y), \tag{1.8}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Отметим, что из (1.8) следует

$$F(x';x'')(x'-x'')=\int_0^1 F'[x''+t(x'-x'')](x'-x'')dt = \\ =F(x')-F(x''), \tag{1.9}$$

т. е. выполняется соотношение (1.1). Легко показать, что определенная равенством (1.8) разделенная разность симметрична:

$$F(x'';x')=\int_0^1 F'[x'+t(x''-x')]dt=\int_0^1 F'[(1-t)x'+tx'']dt= \\ =-\int_1^0 F'[\tau x'+(1-\tau)x'']d\tau=\int_0^1 F'[x''+t(x'-x'')]dt=F(x';x''). \tag{1.10}$$

Анализируя вышеизложенные определения, отметим, во-первых, что определение разделенной разности только на основании соотношения (1.1) является действительно слишком общим. Рассмотрим конкретный пример (ср. [3]).

Пусть $X=Y=R_2$; $F(x)=(f_1(x),f_2(x))$; $x=(u,v)$.

Пусть $x'=(u',v')$; $x''=(u'',v'')$. Исходя из соотношения (1.1), можно определить

$$F(x';x'')=\begin{pmatrix} \dfrac{f_1(u',v')-f_1(u'',v'')}{u'-u''} & 0 \\ 0 & \dfrac{f_2(u',v')-f_2(u'',v'')}{v'-v''} \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Оператор (1.11) является, в общем, неограниченным и, по-видимому, не имеет никакой практической ценности.

Что касается условий (1.3) или (1.5) и (1.6), то они, очевидно, установлены с целью получения оценок (1.4) и (1.7) соответственно, которые используются для доказательства сходимости метода хорд (ср. [1–3]). Жестким в общем случае является требование симметричности: $F(x'; x'') = F(x''; x')$, так как, например, некоторые разделенные разности векторных функций с векторными аргументами не являются симметричными. Определение (1.8) требует для построения разделенных разностей вычисления производной оператора, что в практике часто затруднительно.

В дальнейшем мы исходим из следующего определения разделенной разности первого порядка $F(x'; x'')$ оператора $F(x)$.

Определение. Оператор $F(x'; x'')$ называется разделенной разностью первого порядка оператора $F(x)$, если

1° для каждых фиксированных $x', x'' \in X$ оператор $F(x'; x'') \in (X \to Y)$, причем

$$F(x'; x'')(x' - x'') = F(x') - F(x''); \tag{1.12}$$

2° если существует производная Фреше $F'(x)$ [18], то

$$F(x; x) = F'(x). \tag{1.13}$$

Отметим, что определенный таким образом оператор $F(x'; x'')h$ является относительно x', x'' в общем нелинейным, а относительно h — линейным оператором.

Надо подчеркнуть, что и определенная условиями (1.12) и (1.13) разделенная разность не является, вообще говоря, единственной. Рассмотрим, например, случай

$$X = R_2;\ Y = R_1;\ F(x) = f(u, v).$$

Обозначив $x' = (u', v')$, $x'' = (u'', v'')$, можно указать три (в общем различных) удовлетворяющих условиям (1.12) и (1.13) разделенных разности для оператора $F(x)$:

а) $$F(x'; x'')_{\mathrm{I}} = \left(\frac{f(u', v') - f(u'', v')}{u' - u''},\ \frac{f(u'', v') - f(u'', v'')}{v' - v''}\right) =$$

$$= \left(\int_0^1 f_u(u'' + t(u' - u''), v')\,dt,\ \int_0^1 f_v(u'', v'' + t(v' - v''))\,dt\right); \tag{1.14}$$

б) $$F(x'; x'')_{\mathrm{II}} = \left(\frac{f(u'', v'') - f(u', v'')}{u'' - u'},\ \frac{f(u', v'') - f(u', v')}{v'' - v'}\right) =$$

$$= \left(\int_0^1 f_u(u' + t(u'' - u'), v'')\,dt,\ \int_0^1 f_v(u', v' + t(v'' - v'))\,dt\right); \tag{1.15}$$

в) $$F(x'; x'')_{\mathrm{III}} = \Big(\int_0^1 f_u(u'' + t(u' - u''),\ v'' + t(v' - v''))\,dt,$$

$$\int_0^1 f_v(u'' + t(u' - u''),\ v'' + t(v' - v''))\,dt\Big). \tag{1.16}$$

Здесь $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$, причем $F'(x) = (f_u, f_v)$.

В практических приложениях лучше использовать разделенные разности (1.14) и (1.15), так как при этом не требуется вычисления частных производных.

§ 2. Обобщенные разделенные разности второго порядка

Для определения разделенных разностей второго порядка имеются различные возможности.

Во-первых, разделенная разность второго порядка $F(x'; x''; x''')$ есть для каждых фиксированных $x', x'', x''' \in X$ билинейный оператор из пространства X в пространство $(X \to Y)$, т. е. $F(x'; x''; x''') \in X \to (X \to Y)$.

Соотношение, соответствующее (1.1), можно представить тремя (в общем различными) способами:

а) $$F(x'; x''; x''')(x' - x''') = F(x'; x'') - F(x''; x'''); \tag{2.1}$$

б) $$F(x'; x''; x''')(x' - x'') = F(x'; x''') - F(x''; x'''); \tag{2.2}$$

в) $$F(x'; x''; x''')(x'' - x''') = F(x'; x'') - F(x'; x'''). \tag{2.3}$$

Соотношение (2.1) [или соответственно (2.2), (2.3)] должно выполниться для каждых $x', x'', x''' \in X$.

Отметим, что если $F(x'; x'')$ и $F(x'; x''; x''')$ являются относительно своих аргументов (соответственно x', x'' и x', x'', x''') симметричными, то соотношения (2.1), (2.2) и (2.3) эквивалентны.

Покажем эквивалентность соотношения (2.2) с соотношением (2.1):

$$F(x'; x''; x''')(x' - x'') = F(x'; x'''; x'')(x' - x'') =$$
$$= F(x'; x''') - F(x''; x''') = F(x'; x''') - F(x'''; x''), \tag{2.4}$$

т. е. для каждых $x', x'', x''' \in X$ справедливо

$$F(x'; x'''; x'')(x' - x'') = F(x'; x''') - F(x'''; x''). \tag{2.5}$$

Покажем эквивалентность соотношения (2.3) с соотношением (2.1):

$$F(x'; x''; x''')(x'' - x''') = F(x''; x'; x''')(x'' - x''') =$$
$$= F(x'; x'') - F(x'; x''') = F(x''; x') - F(x'; x'''), \tag{2.6}$$

т. е. для каждых $x', x'', x''' \in X$ справедливо

$$F(x''; x'; x''')(x'' - x''') = F(x''; x') - F(x'; x'''). \tag{2.7}$$

Кроме того, требуем, чтобы

$$F(x; x; x) = \tfrac{1}{2}F''(x).$$

Итак, в симметричном случае можно при определении разделенной разности второго порядка использовать любое из соотношений (2.1), (2.2), (2.3). Отметим, что в несимметричном случае целесообразно отказаться от этого требования. Нужно только требовать, чтобы при существовании ограниченной второй производной оператора $F(x)$ в некоторой замкнутой сфере S для каждого $x', x'', x''' \in S$ существовал и ограниченный оператор $F(x'; x''; x''')$ (ср. § 4 и 5). Как мы увидим в дальнейшем (§ 4), для векторных функций с векторными аргументами удается построить несимметричные разделенные разности типа (2.2) и (2.3).

§ 3. Примеры симметричных разделенных разностей первого и второго порядков

Некоторые примеры первых разделенных разностей даны в работах [3, 11]. Здесь приведем также примеры вторых разделенных разностей.

А. Нелинейный интегральный оператор Фредгольма. Определим в пространстве $C[0, 1]$ оператор

$$y = F(x) \tag{3.1}$$

следующим образом:

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\,dt, \tag{3.2}$$

где $K(s, t, u)$ — непрерывная функция своих аргументов.

Тогда

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^1 [K(s, t, x_1(t)) - K(s, t, x_2(t))]dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{K(s, t, x_1(t)) - K(s, t, x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} (x_1(t) - x_2(t))\,dt = F(x_1; x_2)(x_1 - x_2) \tag{3.3}$$

и, следовательно, естественно положить

$$F(x_1; x_2)h = \int_0^1 \frac{K(s, t, x_1(t)) - K(s, t, x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} h(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Аналогично получим

$$F(x_1; x_2; x_3)hk = \int_0^1 \left[\frac{K(s, t, x_1(t)) - K(s, t, x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{K(s, t, x_2(t)) - K(s, t, x_3(t))}{x_2(t) - x_3(t)}\right] \frac{h(t)k(t)}{x_1(t) - x_3(t)}\,dt. \tag{3.5}$$

Б. Дифференциальный оператор первого порядка. Рассмотрим множество X непрерывно дифференцируемых функций $\{x(t)\}$ $(t \geqslant t_0)$, удовлетворяющих условию $x(t_0) = 0$. На этом множестве рассмотрим преобразование $y = F(x)$, определенное следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, x) \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $f(t, x)$ — непрерывная функция своих аргументов.

Соотношения $y_1 = F(x_1)$ и $y_2 = F(x_2)$ имеют соответственно следующий смысл:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f(t, x_1) \\ y_1(t_0) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

и

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dt} = f(t, x_2) \\ y_2(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Соотношение $y_1 - y_2 = F(x_1) - F(x_2)$ можно тогда представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = f(t, x_1) - f(t, x_2) \\ (y_1 - y_2)(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Определим разделенную разность $z = F(x_1; x_2)h$ следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} h(t) \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Покажем, что если $h = h(t) = x_1(t) - x_2(t)$, то $z = y_1 - y_2 = F(x_1) - F(x_2)$. Действительно, на основании (3.10) получим

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f(t, x_1) - f(t, x_2) \\ z(t_0) = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

т. е. $z = y_1 - y_2$ [ср. (3.9)].

Исходя из соотношения

$$F(x_1; x_2; x_3)(x_1 - x_3)k = F(x_1; x_2)k - F(x_2; x_3)k, \tag{3.12}$$

можно аналогично для оператора (3.6) построить и разделенную разность второго порядка. Обозначим $z_1 = F(x_1; x_2)k$ и $z_2 = F(x_2; x_3)k$.

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} k(t) \\ z_1(t_0) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{dz_2}{dt} = \dfrac{f(t, x_2) - f(t, x_3)}{x_2 - x_3} k(t) \\ z_2(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Соотношение $z = F(x_1; x_2; x_3)(x_1 - x_3)k = z_1 - z_2$ выражается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} k - \dfrac{f(t, x_2) - f(t, x_3)}{x_2 - x_3} k \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Отсюда ясно, что оператор $z = F(x_1; x_2; x_3)hk$ можно определить следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \left[\dfrac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} - \dfrac{f(t, x_2) - f(t, x_3)}{x_2 - x_3}\right] \dfrac{hk}{x_1 - x_3} \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

В работе [13] построена первая разделенная разность для оператора довольно общей краевой задачи (в обыкновенных или частных производных). Аналогично (3.16) можно в этом случае построить и разделенную разность второго порядка.

§ 4. Разделенные разности для функций нескольких переменных и для векторных функций с векторными аргументами

Рассмотрим оператор (функционал) $y = F(x)$, где

$$F(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.1}$$

Используем обозначения (ср. [4, 19])

$$x' = (u_1, u_2, \ldots, u_n);$$

$$x'' = (v_1, v_2, \ldots, v_n);$$

$$x''' = (w_1, w_2, \ldots, w_n);$$

$$f(\ldots; u_i v_i; \ldots) = \frac{f(\ldots, u_i, \ldots) - f(\ldots, v_i, \ldots)}{u_i - v_i}; \tag{4.2}$$

$$f(\ldots; u_i v_i w_i; \ldots) = \frac{f(\ldots; u_i v_i; \ldots) - f(\ldots; v_i w_i; \ldots)}{u_i - w_i} = \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{u_i - w_i}\left[\frac{f(\ldots, u_i, \ldots) - f(\ldots, v_i, \ldots)}{u_i - v_i} - \frac{f(\ldots, v_i, \ldots) - f(\ldots, w_i, \ldots)}{v_i - w_i}\right];$$

$$f(\ldots; u_i v_i; \ldots; u_j w_j; \ldots) =$$
$$= \frac{f(\ldots, u_i, \ldots; u_j w_j; \ldots) - f(\ldots, v_i, \ldots; u_j w_j; \ldots)}{u_i - v_i} =$$
$$= \frac{1}{u_i - v_i}\left[\frac{f(\ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots) - f(\ldots, u_i, \ldots, w_j, \ldots)}{u_j - w_j} - \right. \tag{4.4}$$
$$\left. - \frac{f(\ldots, v_i, \ldots, u_j, \ldots) - f(\ldots, v_i, \ldots, w_j, \ldots)}{u_j - w_j}\right]$$

или

$$f(\ldots; u_i v_i; \ldots; u_j w_j; \ldots) =$$
$$= \frac{f(\ldots; u_i v_i; \ldots, u_j, \ldots) - f(\ldots; u_i v_i; \ldots, w_j, \ldots)}{u_j - w_j} =$$
$$= \frac{1}{u_j - w_j}\left[\frac{f(\ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots) - f(\ldots, v_i, \ldots, u_j, \ldots)}{u_i - v_i} - \right. \tag{4.5}$$
$$\left. - \frac{f(\ldots, u_i, \ldots, w_j, \ldots) - f(\ldots, v_i, \ldots, w_j, \ldots)}{u_i - v_i}\right].$$

Тогда $F(x'; x'')$ можно определить двумя различными способами*:

$$F(x'; x'')_{\mathrm{I}} = (f(u_1 v_1; u_2, \ldots, u_n),\ f(v_1; u_2 v_2; u_3, \ldots, u_n),$$
$$f(v_1, v_2; u_3 v_3; u_4, \ldots, u_n), \ldots, f(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}; u_n v_n)) \tag{4.6}$$

и

$$F(x'; x'')_{\mathrm{II}} = (f(v_1 u_1; v_2, \ldots, v_n),\ f(u_1; v_2 u_2; v_3, \ldots, v_n),$$
$$f(u_1, u_2; v_3 u_3; v_4, \ldots, v_n), \ldots, f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}; v_n u_n)). \tag{4.7}$$

В частности, для функции двух переменных $F(x) = f(x_1, x_2)$ получим

$$F(x'; x'')_{\mathrm{I}} = (f(u_1 v_1; u_2)\ \ f(v_1; u_2 v_2)) =$$
$$= \left(\frac{f(u_1, u_2) - f(v_1, u_2)}{u_1 - v_1}\ \ \frac{f(v_1, u_2) - f(v_1, v_2)}{u_2 - v_2}\right) \tag{4.8}$$

$$F(x'; x'')_{\mathrm{II}} = (f(v_1 u_1; v_2)\ \ f(u_1; v_2 u_2)) =$$
$$= \left(\frac{f(v_1, v_2) - f(u_1, v_2)}{v_1 - u_1}\ \ \frac{f(u_1, v_2) - f(u_1, u_2)}{v_2 - u_2}\right). \tag{4.9}$$

Выражения вторых разделенных разностей для функции (4.1) представлены в таблице.

Этими разделенными разностями являются треугольные матрицы. Отметим, что $F(x; x; x)_1 \neq \frac{1}{2}F''(x)$ и $F(x; x; x)_2 \neq \frac{1}{2}F''(x)$. Но легко видеть, что $F(x; x; x)_1 + F(x; x; x)_2 = F''(x)$.

---

* Определенные формулами (4.6) и (4.7) выражения вернее называть разностными градиентами функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ (ср. § 6).

Обозначение разделенной разности	Основное соотношение	Выражение для разделенной разности
$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II}}(x''-x''') = F(x'; x'')_{\mathrm{I}} - F(x'; x''')_{\mathrm{I}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II}} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, где $a_{ij} = \begin{cases} f(w_1,\ldots,w_{j-1}; v_jw_j; v_{j+1},\ldots,v_{i-1}; u_iv_i; u_{i+1},\ldots,u_n), & \text{если } j<i; \\ f(w_1,\ldots,w_{i-1}; v_iu_iw_i; u_{i+1},\ldots,u_n), & \text{если } j=i; \\ 0, & \text{если } j>i. \end{cases}$
$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{III}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{III}}(x''-x''') = F(x'; x'')_{\mathrm{II}} - F(x'; x''')_{\mathrm{II}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{III}} = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, где $b_{ij} = \begin{cases} f(u_1,\ldots,u_{i-1}; u_iw_i; w_{i+1},\ldots,w_{j-1}; v_jw_j; v_{j+1},\ldots,v_n), & \text{если } j>i; \\ f(u_1,\ldots,u_{i-1}; v_iu_iw_i; v_{i+1},\ldots,v_n), & \text{если } j=i; \\ 0, & \text{если } j<i. \end{cases}$ (4.10)
$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{I2}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{I2}}(x'-x'') = F(x'; x''')_{\mathrm{I}} - F(x''; x''')_{\mathrm{I}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{I2}} = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, где $c_{ij} = \begin{cases} f(w_1,\ldots,w_{i-1}; v_iw_i; v_{i+1},\ldots,v_{j-1}; u_jv_j; u_{j+1},\ldots,u_n), & \text{если } j>i; \\ f(w_1,\ldots,w_{i-1}; v_iu_iw_i; u_{i+1},\ldots,u_n), & \text{если } j=i; \\ 0, & \text{если } j<i. \end{cases}$
$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II2}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II2}}(x'-x'') = F(x'; x''')_{\mathrm{II}} - F(x''; x''')_{\mathrm{II}}$	$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II2}} = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, где $d_{ij} = \begin{cases} f(v_1,\ldots,v_{j-1}; u_jv_j; u_{j+1},\ldots,u_{i-1}; u_iw_i; w_{i+1},\ldots,w_n), & \text{если } j<i; \\ f(v_1,\ldots,v_{i-1}; v_iu_iw_i; w_{i+1},\ldots,w_n), & \text{если } j=i; \\ 0, & \text{если } j>i. \end{cases}$

Теперь легко построить разделенные разности и для векторных функций с векторными аргументами

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.11}$$

Например, разделенная разность $F(x'; x'')_{\mathrm{I}}$ выражается в данном случае в виде

$$F(x'; x'')_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} f_1(u_1v_1; u_2, \ldots, u_n) & f_1(v_1; u_2v_2; u_3, \ldots, u_n) \ldots \\ \ldots f(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}; u_nv_n) & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_n(u_1v_1; u_2, \ldots, u_n) & f_n(v_1; u_2v_2; u_3, \ldots, u_n) \ldots \\ \ldots f(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}; u_nv_n) & \end{pmatrix} =$$

$$= (f_i(v_1, \ldots, v_{j-1}; u_jv_j; u_{j+1}, \ldots, u_n))_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, n.}} \tag{4.12}$$

Разделенная разность $F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II}}$ выражается в виде трехмерной матрицы

$$F(x'; x''; x''')_{\mathrm{II}} = (a_{ijk})_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, n \\ k=1, \ldots, n,}} \tag{4.13}$$

где

$$a_{ijk} = \begin{cases} f_k(w_1, \ldots, w_{j-1}; v_jw_j; v_{j+1}, \ldots, v_{i-1}; u_iv_i; u_{i+1}, \ldots, u_n), \text{ если } j < i \\ f_k(w_1, \ldots, w_{i-1}; v_iu_iw_i; u_{i+1}, \ldots, u_n), \quad \text{если } j = i \\ 0, \quad \text{если } j > i \end{cases}$$

и т. д.

§ 5. Некоторые оценки

Рассмотрим некоторые важные в практике оценки, связанные с разделенными разностями функций нескольких переменных $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть норма элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дается равенством

$$\|x\| = \max_{k=1, \ldots, n} |x_k|. \tag{5.1}$$

Соответствующая норма матрицы $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, n}}$ выражается в виде

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{5.2}$$

Предположим, что вторые производные функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ ограничены в некоторой сфере S пространства m_n, т. е. в этой сфере

$$\left|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant f_{ij} = f_{ji}. \tag{5.3}$$

Тогда в сфере S справедливы оценки (см. [20])

$$|f(\ldots;\ u_i v_i w_i;\ \ldots)| \leqslant \tfrac{1}{2} f_{ii} \tag{5.4}$$

$$|f(\ldots;\ u_i v_i;\ \ldots;\ v_j w_j;\ \ldots)| \leqslant f_{ij} = f_{ji}. \tag{5.5}$$

Используя соотношения (4.10), легко получить для разделенных разностей (4.6) и (4.7) следующие оценки:

$$\text{а)}\quad \|F(x'; x'')_{\mathrm{I}} - F(x'; x''')_{\mathrm{I}}\| \leqslant K_1 \|x'' - x'''\|, \tag{5.6}$$

где

$$K_1 = \max_i \left(\tfrac{1}{2} f_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij}\right); \tag{5.7}$$

$$\text{б)}\quad \|F(x'; x'')_{\mathrm{II}} - F(x'; x''')_{\mathrm{II}}\| \leqslant K_2 \|x'' - x'''\|, \tag{5.8}$$

где

$$K_2 = \max_i \left(\tfrac{1}{2} f_{ii} + \sum_{j=i+1}^{n} f_{ij}\right); \tag{5.9}$$

$$\text{в)}\quad \|F(x'; x''')_{\mathrm{I}} - F(x''; x''')_{\mathrm{I}}\| \leqslant K_2 \|x' - x''\|; \tag{5.10}$$

$$\text{г)}\quad \|F(x'; x''')_{\mathrm{II}} - F(x''; x''')_{\mathrm{II}}\| \leqslant K_1 \|x' - x''\|. \tag{5.11}$$

Аналогичные оценки можно получить и для разделенных разностей векторной функции с векторным аргументом (4.11).

Предположим, что вторые производные функций $f_k(x_1, \ldots, x_n) = f_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ ограничены в некоторой сфере пространства m_n, т. е.

$$\left|\frac{\partial^2 f_k(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant f_{ij}^k = f_{ji}^k. \tag{5.12}$$

Тогда в этой сфере справедливы оценки

$$|f_k(\ldots;\ u_i v_i w_i;\ \ldots)| \leqslant \frac{1}{2} f_{ii}^k, \tag{5.13}$$

$$|f_k(\ldots;\ u_i v_i;\ \ldots;\ v_j w_j;\ \ldots)| \leqslant f_{ij}^k = f_{ji}^k. \tag{5.14}$$

И. Шмидт [4] показал, что для разделенной разности (4.12) справедлива оценка

$$\|F(x'; x'')_{\mathrm{I}} - F(x''; x''')_{\mathrm{I}}\| \leqslant A_1 \|x' - x'''\| + A_2 (\|x' - x''\| + \|x'' - x'''\|), \tag{5.15}$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2} \max_k \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^k \tag{5.16}$$

и
$$A_2 = \max_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij}^k = \max_k \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{ij}^k. \tag{5.17}$$

Используя оценку нормы для билинейной операции в пространстве m_n (см. [21], стр. 601), теперь легко получить оценки

$$\text{а)}\quad \|F(x'; x'')_{\mathrm{I}} - F(x'; x''')_{\mathrm{I}}\| \leqslant K\|x'' - x'''\|, \tag{5.18}$$

$$\text{б)}\quad \|F(x'; x'')_{\mathrm{II}} - F(x'; x''')_{\mathrm{II}}\| \leqslant K\|x'' - x'''\|, \tag{5.19}$$

$$\text{в)}\quad \|F(x'; x''')_{\mathrm{I}} - F(x''; x''')_{\mathrm{I}}\| \leqslant K\|x' - x''\|, \tag{5.20}$$

$$\text{г)}\quad \|F(x'; x''')_{\mathrm{II}} - F(x''; x''')_{\mathrm{II}}\| \leqslant K\|x' - x''\|, \tag{5.21}$$

где
$$K = \max_k \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} f_{ij}^k \right\} =$$
$$= \max_k \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f_{ij}^k \right\}. \tag{5.22}$$

§ 6. О некоторых алгоритмах для нахождения стационарных точек функционалов

Разделенную разность (разностный градиент $F(x'; x'') \in X^*$ функционала $f(x)$ $(x \in X)$ можно определить следующими условиями*:

$$1^\circ \quad (F(x'; x''), x' - x'') = f(x') - f(x'') \tag{6.1}$$

для каждого $x', x'' \in X$;

$$2^\circ \quad F(x; x) = \operatorname{grad} f(x) = G(x). \tag{6.2}$$

Примерами разностного градиента являются формулы (4.6) и (4.7).

Стационарные точки функционала $f(x)$ удовлетворяют уравнению

$$G(x) = 0 \tag{6.3}$$

или

$$F(x; x) = 0. \tag{6.4}$$

Поскольку в практике вычисление градиента функционала часто связано с большими трудностями, представляют большой интерес такие методы решения уравнения (6.3) [или (6.4)], которые используют разделенные разности функционала $f(x)$.

Простейшим из алгоритмов такого типа является

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon F(x_n; y_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.5}$$

где $\varepsilon > 0$; $y_n = (1 - \alpha) x_n + \alpha x_{n-1}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Отметим, что при $\alpha = 0$ из алгоритма (6.5) получается обычный алгоритм метода градиентов (ср. [22]).

* Символ (y, x) обозначает для фиксированного $y \in X^*$ значение линейного функционала в пространстве X (см. [18]).

Используя формулы (4.8) и (4.9), получим, например, для нахождения стационарных точек функции двух переменных $f(u, v)$ следующие алгоритмы (обозначим $x_n = (u_n, v_n)$; $y_n = (s_n, t_n) = ((1-\alpha)u_n + \alpha u_{n-1}, (1-\alpha)v_n + \alpha v_{n-1}))$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \varepsilon \dfrac{f(u_n, v_n) - f(s_n, v_n)}{u_n - s_n} \\ v_{n+1} = v_n - \varepsilon \dfrac{f(s_n, v_n) - f(s_n, t_n)}{v_n - t_n} \end{cases} \tag{6.6}$$

и

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \varepsilon \dfrac{f(s_n, t_n) - f(u_n, t_n)}{s_n - u_n} \\ v_{n+1} = v_n - \varepsilon \dfrac{f(u_n, t_n) - f(u_n, v_n)}{t_n - v_n}. \end{cases} \tag{6.7}$$

Можно построить и алгоритмы, содержащие вторые разделенные разности функционала. Для простоты рассмотрим случай второй разделенной разности типа (2.1).

Исходим из выражения

$$\begin{aligned} 0 = F(x^*; x^*) &= F(x_n; x_{n-1}) + F(x^*; x^*) - F(x^*; x_n) + \\ &+ F(x^*; x_n) - F(x_n; x_{n-1}) = \\ &= F(x_n; x_{n-1}) + F(x^*; x^*; x_n)(x^* - x_n) + \\ &+ F(x^*; x_n; x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) = \\ &= F(x_n; x_{n-1}) + F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})(x^* - x_n) + \\ &+ F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})(x^* - x_{n-1}) + \\ &+ [F(x^*; x^*; x_n) - F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})](x^* - x_n) + \\ &+ [F(x^*; x_n; x_{n-1}) - F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})](x^* - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Используя приближенное равенство

$$\begin{aligned} F(x_n; x_{n-1}) + 2F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})(x^* - x_n) + \\ + F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})(x^* - x_{n-1}) \approx 0, \end{aligned} \tag{6.9}$$

получим [решая (6.9) относительно x^* и принимая $x^* = x_{n+1}$]

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \tfrac{1}{2}[F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})]^{-1}[F(x_n; x_{n-1}) + \\ + F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})(x_n - x_{n-1})] \end{aligned}$$

или

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - \tfrac{1}{2}[F(x_n; x_{n-1}; x_{n-2})]^{-1} F(x_n; x_{n-1}). \tag{6.10}$$

Метод (6.10) был исследован для случая функции одной переменной И. Шмидтом [23], показавшим, что порядком сходимости (6.10) является $\approx 1{,}32$. Было бы интересно исследовать аналогичные алгоритмы и для функционалов с разделенными разностями типа (2.2) и (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., **41**, Sonderheft, 61—63 (1961).
2. Сергеев А. С., Сибирск. матем. ж., **11**, № 2, 282—289 (1961).
3. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., **43**, Nr. 1—2, 1—8 (1963).
4. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., **43**, Nr. 3, 97—110 (1963).
5. Сергеев А. С., Сб. науч. тр. Пермского политехн. ин-та, № 13, 43—54 (1963).
6. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **12**, № 1, 24—30 (1963).
7. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **12**, № 2, 132—140 (1963).
8. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **12**, № 3, 238—243 (1963).
9. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **12**, № 4, 384—390 (1963).
10. Ульм С., ДАН СССР, **158**, № 1, 56—58 (1964).
11. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **13**, № 3, 217—227 (1964).
12. Chen Kuo-Wang, Comment. Math. Univ. Carolinae, **5**, No. 2, 47—77 (1964).
13. Ульм С., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **4**, № 6, 1093—1097 (1964).
14. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 3, 435—444 (1965).
15. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 4, 534—539 (1965).
16. Schröder J., Arch. Math., **7**, Nr. 6, 471 (1956).
17. Белостоцкий А. Я., Усп. матем. наук, **17**, № 5, 192—193 (1962).
18. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956.
19. Kunz K. C., Numerical Analysis, New York—Toronto—London, 1957.
20. Willers F., Methoden der praktischen Analysis, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957.
21. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
22. Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **3**, № 4, 643—654 (1963).
23. Schmidt J. W., Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, **12**, Nr. 6, 1601—1605 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15/II 1966

S. ULM

ÜLDISTATUD DIFERENTSSUHETEST. I

Esitatakse esimest ja teist järku diferentssuhete definitsioonid operaatorjuhul ja tuuakse näiteid nende konstrueerimisest konkreetsetel juhtudel (mittelineaarne Fredholmi integraaloperaator, esimest järku diferentsiaaloperaator, mitme muutuja funktsioonid, vektorargumendiga vektorfunktsioonid). Tuletatakse mõned praktikas vajalikud hinnangud ja vaadeldakse diferentssuhteid kasutavaid algoritme funktsionaalide statsionaarsete punktide leidmiseks.

S. ULM

ON GENERALIZED DIVIDED DIFFERENCES. I

The paper gives definitions of the generalized divided differences for operators. The author presents the generalized divided differences of the first and second order constructed for the following operators: the nonlinear Fredholm's integral operator, the differential operator of the first order, functions of several variables, the vector functions with vector arguments. The generalized divided differences are applied for computing the stationary points of the functionals.