EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XVII KÖIDE
KEEMIA * GEOLOOGIA. 1968, Nr. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XVII
ХИМИЯ * ГЕОЛОГИЯ. 1968, № 1

https://doi.org/10.3176/chem.geol.1968.1.10

Л. ВАЛЛНЕР

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

В предыдущих исследованиях автора [1, 2] рассматривалась применимость гармонического анализа для изучения одномерной нестационарной фильтрации подземных вод при общих граничных условиях. В настоящей статье предлагаются дополнительные формулы, позволяющие учитывать влияние внутреннего источника гидравлического напора, заданного в общем виде.

Подземный поток с напорной поверхностью

Нестационарное распределение гидравлического напора в водоносном горизонте с напорной поверхностью, который однороден, и имеет постоянную мощность, описывается дифференциальным уравнением [2–5]

$$\partial H/\partial t = \varkappa^2 \partial^2 H/\partial x^2 + p(x, t), \tag{1}$$

где H — гидравлический напор и $\varkappa^2$ — коэффициент пьезопроводности.

Для изучения разных гидрогеологических проблем требуется решить уравнение (1) в ограниченном интервале изменений

$$0 \leqslant x \leqslant L \tag{2}$$

при граничных условиях

$$H(0, t) = H_0(t), \qquad H(L, t) = H_L(t) \tag{3}$$

и начальном условии

$$H(x, 0) = H_x(x), \tag{4}$$

где L — длина рассматриваемого потока.

Здесь принимается, что в сечениях подземного потока $x=0$ и $x=L$ гидравлические напоры являются заданными функциями времени, соответственно $H_0(t)$ и $H_L(t)$, которые изменяются в силу колебания уровня воды в поверхностных водоемах под влиянием водозаборных сооружений и т. д.

Функция $p(x, t)$ — заданный внутренний источник гидравлического напора, сущность которого подробно рассматривается в работах [4–7]. Она выражает изменения напряжения на кровле пласта от колебания атмосферного давления и мощности вышележащего водоносного горизонта со свободной поверхностью. Функцией $p(x, t)$ может быть описана и дегидратация глинистых слоев, вызванная большим понижением напора в водоносном горизонте [8], а также явления перетекания через относительно слабопроницаемые раздельные слои, действие родников, влияние каптажных сооружений и т. п.

Начальное условие (4) принято в предположении, что при $t \leqslant 0$ подземный поток подчиняется стационарному режиму фильтрации ($H_0(t)$, $H_L(t)$, $p(t) = \mathrm{const}$). Стационарное начальное распределение гидравлического напора может быть получено, если в уравнении (1) считать $\partial H/\partial t = 0$ и $\partial p/\partial t = 0$. Решая обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varkappa^2 \partial^2 H/\partial x^2 + p(x) = 0, \tag{5}$$

будем иметь

$$H_x(x) = -(1/\varkappa^2) \int_0^x \int_0^v p(\bar{x})\, d\bar{v} d\bar{x} + Bx + A, \tag{6}$$

где A и B — постоянные интегрирования.

По своей физико-математической природе функции $H_0(t)$ и $H_L(t)$ — ограниченные и непрерывные, а функция $p(x, t)$ ограниченная и кусочно-непрерывная. Функции $H_0(t)$, $H_L(t)$ и $p(x, t)$ имеют в каждой точке производные по всем переменным.

Решение задачи (1) — (4) описывает *нестационарное распределение гидравлического напора* *:

$$H(x, t) = H_0(t) + [H_L(t) - H_0(t)]x/L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2 \sin i\pi x/L)/L]\chi_i(t), \tag{7}$$

причем

$$\chi_i(t) = \int_0^t \exp[(\varkappa i\pi/L)^2(\bar{t} - t)] \int_0^L p(x, \bar{t}) \sin(i\pi x/L)\, dx d\bar{t} +$$
$$+ \exp[-(\varkappa i\pi/L)^2 t] \int_0^L \{H_x(x) - H_0(0) - [H_L(0) - H_0(0)]x/L\} \times$$
$$\times \sin(i\pi x/L)\, dx + (L^3/\varkappa^2 i^3 \pi^3) \{\partial[(-1)^i H_L(t) - H_0(t)]/\partial t -$$
$$- \{\partial[(-1)^i H_L(0) - H_0(0)]/\partial t\} \exp[-(\varkappa i\pi/L)^2 t] -$$
$$- \int_0^t \{\partial^2[(-1)^i H_L(\bar{t}) - H_0(\bar{t})]/\partial \bar{t}^2\} \exp[(\varkappa i\pi/L)^2(\bar{t} - t)]\, d\bar{t}\}. \tag{8}$$

Дифференцируя выражение (7) по x, получим выражение для *градиента напора в любом сечении потока*:

$$\partial H(x, t)/\partial x = [H_L(t) - H_0(t)]/L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2i\pi \cos i\pi x/L)/L^2]\chi_i(t). \tag{9}$$

Тогда *суммарный расход подземного потока* за время от t_1 до t_2 можно подсчитать по формуле

$$Q = Fk \int_{t_1}^{t_2} [\partial H(x, t)/\partial x]\, dt, \tag{10}$$

где F — площадь поперечного сечения потока и k — коэффициент фильтрации пласта. Следует иметь в виду, что реальное содержание имеют только абсолютные значения Q, т. е. $|Q|$. Однако знак перед

---

* Для простоты принято обозначение $\partial H(t)/\partial t|_{t=0} = \partial H(0)/\partial t$.

правой стороной формулы (10) показывает, какое превалирующее направление подземный сток имеет за промежуток времени от t_1 до t_2. При отрицательных значениях $\partial H(x, t)/\partial x$ подземные воды перемещаются в направлении возрастающих значений x, а при положительных значениях сток происходит в направлении убывающих значений x.

Подземный поток со свободной поверхностью

Нестационарное распределение гидравлического напора в водоносном горизонте, плоском в разрезе, имеющем свободную поверхность, описывается, если только соблюдается гипотеза Дюпюи, дифференциальным уравнением [9, 10]

$$\partial(T\partial H/\partial x)/\partial x + W = \mu \partial H/\partial t, \tag{11}$$

причем $T = hk$ — проводимость и h — мощность водовмещающего пласта; $\mu > 0$ при подпоре $(\partial H/\partial t > 0)$ соответствует коэффициенту недостатка насыщения μ_H, а при спаде $(\partial H/\partial t < 0)$ — коэффициенту водоотдачи μ_B.

Уравнение (11) нелинейное, поскольку в общем случае проводимость T и функция источника W находятся в зависимости от изменения напора H.

Если водовмещающий пласт по вертикали однородный и залегает на горизонтальном водоупорном основании, причем $W = W(x, t)$, то $H = h$ и уравнение (11) принимает вид

$$k\partial(h\partial h/\partial x)/\partial x + W = \mu \partial h/\partial t. \tag{12}$$

Требуется найти функцию *распределения мощности водоносного горизонта* $h(x, t)$ в конечном интервале изменений

$$0 \leqslant x \leqslant L, \tag{13}$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$h(0, t) = h_0(t), \qquad h(L, t) = h_L(t) \tag{14}$$

и начальному условию

$$h(x, 0) = h_x(x). \tag{15}$$

По своей физической сущности граничные условия (14) аналогичны с условиями (3).

Функция $W(x, t)$ описывает питание подземного потока за счет инфильтрации вод атмосферных осадков или нижележащих водоносных горизонтов с напорной поверхностью. Она выражает также испарение со свободной поверхности изучаемого потока или отток в подстилающие водоносные горизонты.

Начальное условие (15) принято на основе предположения, что при $t \leqslant 0$ подземный поток подчиняется стационарному режиму фильтрации $(h_0(t), h_L(t), W(t) = \text{const})$. При этом следует иметь в виду, что если $W(x, t) = w = \text{const}$, то стационарное распределение гидравлического напора должно соответствовать известной формуле Г. Каменского

$$h_x(x) = [h_0^2 + (h_L^2 + h_0^2)x/L + w(L - x)x/k]^{1/2}. \tag{16}$$

Зависимость (16) хорошо отражает действительную форму свободной поверхности плоского в разрезе потока подземных вод.

Функция $W(x, t)$, как и $p(x, t)$, ограниченная, кусочно-непрерывная и имеет в каждой точке производные по всем переменным; по своей физико-математической характеристике граничные условия (14) аналогичны условиям (3).

Для решения задачи (12) — (15) линеаризируем исходное уравнение (12) по методу Н. Багрова и Н. Веригина [11].

Имея в виду требование (16), введем новую переменную

$$u = h^2/2, \tag{17}$$

тогда вместо уравнения (12) будем иметь

$$a^2\partial^2 u/\partial x^2 + b = \partial u/\partial t, \tag{18}$$

где коэффициент уровнепроводности $a = (hk/\mu)^{1/2} \approx (h_s k/\mu)^{1/2}$ и $b = hW/\mu \approx h_s W/\mu$. При этом h_s рассматривается как постоянная величина, представляющая некоторую глубину потока, осредненную по времени и по длине водоносного горизонта.

В соответствии с постановкой задачи (12) — (15) уравнение (18) следует решить при граничных условиях

$$u(0, t) = h_0^2(t)/2 = u_0(t), \qquad u(L, t) = h_L^2(t)/2 = u_L(t) \tag{19}$$

и начальном условии

$$u(x, 0) = h_x^2(x)/2 = u_x(x). \tag{20}$$

Уравнение (1) и (18), а также граничные и начальные условия (3), (4) и (19), (20) по сути аналогичны. Поэтому, на основе формулы (7) и соотношения (17), решение задачи (12) — (15) представляется в виде *

$$h(x, t) = \Big\{ h_0^2(t) + [h_L^2(t) - h_0^2(t)]x/L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2\sin i\pi x/L)/L]\varphi_i(t) \Big\}^{1/2}, \tag{21}$$

где

$$\varphi_i(t) = 2\int_0^t \exp[(ai\pi/L)^2(\bar{t} - t)] \int_0^L b(x, \bar{t})\sin(i\pi x/L)\,dx\,d\bar{t} + \exp[-(ai\pi/L)^2 t]\int_0^L \{h_x^2(x) - h_0^2(0) - [h_L^2(0) - h_0^2(0)]x/L\} \times$$
$$\times \sin(i\pi x/L)\,dx + (L^3/a^2 i^3\pi^3)\{\partial[(-1)^i h_L^2(t) - h_0^2(t)]/\partial t -$$
$$- \{\partial[(-1)^i h_L^2(0) - h_0^2(0)]/\partial t\}\exp[-(ai\pi/L)^2 t] -$$
$$- \int_0^t \{\partial^2[(-1)^i h_L^2(\bar{t}) - h_0^2(\bar{t})]/\partial \bar{t}^2\}\exp[(ai\pi/L)^2(\bar{t} - t)]\,d\bar{t}\}. \tag{22}$$

Начальное распределение мощности водоносного горизонта $h_x(x)$ в формуле (21) определяется интегрированием уравнения $a^2\partial^2 u/\partial x^2 + b = 0$ при граничных условиях $u\big|_{x=0} = u_0$ и $u\big|_{x=L} = u_L$ с учетом выражения (17).

---

* Вследствие несовершенства использованной гидравлической теории Дюпюи-Форхгеймера [12, 13], здесь не учитывается наличие промежутка высачивания. Формула (21) не учитывает также поднятие поверхности грунтовых вод под влиянием капиллярных сил.

Поскольку *мгновенный расход подземного потока со свободной поверхностью* (на единицу его ширины) определяется зависимостью

$$q(x, t) = kh(x, t)\,\partial h(x, t)/\partial x = k\partial u(x, t)/\partial x, \tag{23}$$

то на основе выражений (21) и (23) будем иметь

$$q(x, t) = k[h_L^2(t) - h_0^2(t)]/2L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2i\pi \cos i\pi x/L)\,L^2]\varphi_i(t). \tag{24}$$

Суммарный расход потока на единицу ширины за промежуток времени от t_1 до t_2 выражается согласно формуле (24) в виде

$$Q(x, t) = k \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ [h_L^2(t) - h_0^2(t)]/2L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2i\pi \cos i\pi x/L)/L^2]\varphi_i(t) \Big\} dt. \tag{25}$$

При горизонтально-слоистом строении водовмещающего пласта проницаемость является некоторой заданной функцией от вертикальной координаты z. Доказывается [5, 13], что в таком случае распределение мощности водоносного горизонта описывается уравнением

$$\partial G/\partial t = \bar{a}^2 \partial^2 G/\partial x^2 + W, \tag{26}$$

где

$$\bar{a} = \Big[(1/\mu h) \int_0^h h(z)\,dz \Big]^{1/2}$$

и

$$G = \int_0^h k(z)\,(h - z)\,dz \tag{27}$$

— вспомогательная функция, называемая потенциалом Гиринского.

Уравнение (26) линейное относительно функции G.

Решение уравнения (26), удовлетворяющее граничным условиям

$$G(0, t) = G_0(t), \quad G(L, t) = G_L(t) \tag{28}$$

и начальному условию

$$G(x, 0) = G_x(x), \tag{29}$$

представляется в виде

$$G(x, t) = G_0(t) + [G_L(t) - G_0(t)]x/L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2 \sin i\pi x/L)]\gamma_i(t), \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_i(t) = {} & \int_0^t \exp[(\bar{a}i\pi/L)^2(\bar{t} - t)] \int_0^L W(x, \bar{t}) \sin(i\pi x/L)\,dx\,d\bar{t} + \\ & + \exp[-(\bar{a}i\pi/L)^2 t] \int_0^L \{G_x(x) - G_0(0) - [G_L(0) - G_0(0)]x/L\} \times \\ & \times \sin(i\pi x/L)\,dx + (L^3/\bar{a}^2 i^3 \pi^3)\{\partial[(-1)^i G_L(t) - G_0(t)]/\partial t - \\ & - \{\partial[(-1)^i G_L(0) - G_0(0)]/\partial t\} \exp[-(\bar{a}i\pi/L)^2 t] - \\ & - \int_0^t \{\partial^2[(-1)^i G_L(\bar{t}) - G_0(\bar{t})]/\partial \bar{t}^2\} \exp[(\bar{a}i\pi/L)^2(\bar{t} - t)]\,d\bar{t}\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Заменяя в выражении (31) функцию G по формуле (27), получим выражение для изучения распределения мощности водоносного горизонта горизонтально-слоистого строения. Если $\partial G/\partial t = 0$, функцию $G_x(x)$ можно определить интегрированием уравнения (26).

Так как доказано [13], что

$$q = \partial G/\partial t, \tag{32}$$

то на основе выражений (32) и (30) получим формулы применительно к условиям водоносного горизонта горизонтального строения для мгновенного расхода

$$q(x,t) = [G_L(t) - G_0(t)]/L + \sum_{i=1}^{\infty} [(2i\pi \cos i\pi x/L)/L^2]\gamma_i(t) \tag{33}$$

и для суммарного расхода

$$Q(x,t) = \int_{t_1}^{t_2} q(x,t)\,dt. \tag{34}$$

Однако, по мнению В. Шестакова [5], для решения уравнения (12) следует пользоваться вышеизложенными методами линеаризации только в исключительных случаях. Более целесообразно в уравнении (11) проводимость T принять за постоянную величину, тогда имеем

$$\partial H/\partial t = a^2\partial^2 H/\partial x^2 + W/\mu. \tag{35}$$

Решение уравнения (35) при граничных условиях

$$H(0,t) = H_0(t), \qquad H(L,t) = H_L(t) \tag{36}$$

и начальном условии

$$H(x,0) = \bar{H}_x(x) \tag{37}$$

можно получить на основе формулы (7), поскольку уравнения (1) и (35), а также краевые условия (3), (4) и (36), (37) аналогичны. Из этого можно найти формулы для градиента напора и суммарного расхода.

Наконец отметим, что в гидрогеологической практике функции H_0, H_L, H_x, $\overline{H}_x$, h_0, h_L, h_x, W, p, G_0, G_L и G_x обычно задаются в виде некоторых совокупностей дискретных данных полевых измерений, т. е. таблично. При вычислениях по предложенным выше формулам, в связи с дифференцированием эмпирических функций, могут возникать специфические трудности. Поэтому рекомендуем эмпирические функции предварительно аппроксимировать полиномами Чебышева [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Валлнер Л., Применение гармонического анализа для изучения динамики напора и стока одномерного потока подземных вод с напорной поверхностью. Изв. АН ЭССР. Химия * Геология, **16**, № 2 (1967).
2. Валлнер Л., Применение гармонического анализа для изучения нестационарного режима одномерной фильтрации потока подземных вод со свободной поверхностью. Изв. АН ЭССР. Химия * Геология, **16**, № 3 (1967).
3. Jacob C. E., On the flow of water in an elastic artesian aquifer, Trans. Amer. Geophysical Union, No. 2 (1940).
4. Щелкачев В. Н., Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде, ДАН СССР, **52**, № 2, 1945.

5. Шестаков В. Н., Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа, М., 1965.
6. Бочевар Ф. М., Шестаков В. М., К расчету потока подземных вод к водозаборным сооружениям в напорном пласте с учетом частичного его осушения, Науч. сообщ. ВНИИ ВОДГЕО, М., 1962.
7. Баренблатт Г. И., Крылов А. П., Об упруго-пластическом режиме фильтрации, Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, № 5 (1953).
8. Vallner L., Lutsar R., On the deformations of the Earth's surface on the territory of Tallinn, Proceedings of the Second International Symposium on Recent Crustal Movements, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Ser. A, III, Geologica-Geografica, 90, Helsinki, 1966.
9. Boussinesq J., Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol, J. math. pures et appl., Ser. 5, **10**, fasc. 1 (1904).
10. Forchheimer P., Hydraulik, Leipzig u. Berlin, 1930.
11. Абрамов С. К., Биндеман Н. Н., Бочевер Ф. М., Веригин Н. Н., Влияние водохранилищ на гидрогеологические условия прилегающих территорий, М., 1960.
12. Полубаринова-Кочина П. А., Теория движения грунтовых вод, М., 1952.
13. Аравин В. И., Нумеров С. Н., Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, М., 1953.

Институт геологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/VIII 1967

L. VALLNER

ÜHEMÕÕTMELISE PÕHJAVEE-VOOLU MITTESTATSIONAARNE FILTRATSIOONIREŽIIM

Paraboolset tüüpi teist järku osatuletistega mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit kasutatakse põhjavete mittestatsionaarse filtratsioonirežiimi kirjeldamiseks.

Esitatakse valemid hüdraulilise rõhu jaotuse, rõhu gradiendi ja summaarse vooluhulga määramiseks, mis on rakendatavad nii surve- kui vabapinnalise põhjavee-voolu puhul.

L. VALLNER

UNSTEADY ONE-DIMENSIONAL GROUND WATER FLOW

Using the non-homogeneous partial differential equation of the second order of the parabolic type, a description is given of the unsteady one-dimensional ground water flow.

Formulas are presented for determining the distribution on the hydraulic pressure, the gradient of the pressure and the summary amount of flow. The formulas are applicable in the case of confined and unconfined aquifers.