EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
BIOLOOGIA. 1970, Nr. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
БИОЛОГИЯ. 1970, № 3

https://doi.org/10.3176/biol.1970.3.08

В. АЛАДЬЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ СОТООБРАЗНЫХ СТРУКТУР

В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы сотообразных структур, связанные с процессом самовоспроизведения конечных автоматов. Исследуются исключительно детерминированные автоматы. По всей вероятности, справедливо, что детерминированные автоматы не в состоянии полностью описать абстрактный процесс самовоспроизведения и для его описания требуется стохастическая теория. Однако, детерминированный подход является уместным в том смысле, что мы не сможем полностью понять стохастические автоматы, пока не будем знать пределов возможностей детерминированных автоматов. Автор статьи полностью согласен с высказыванием Дж. фон Неймана, что большой интерес представляет детерминированный анализ процессов самовоспроизведения конечных автоматов [1]. В первом пункте настоящей статьи рассматривается вопрос о сложности сотообразной структуры, имеющей самовоспроизводящиеся конфигурации. Во втором пункте дается оценка минимального блока сотообразной структуры, содержащего неконструируемые конфигурации. В третьем пункте статьи рассмотрен вопрос существования стираемых конфигураций в структурах, имеющих самовоспроизводящиеся конфигурации. Как в первом, так и в третьем пунктах мы не требуем, чтобы самовоспроизводящиеся конфигурации обязательно содержали универсальную машину Тьюринга. И, наконец, в четвертом пункте мы дадим точные значения и оценки для сотообразных структур некоторых типов и матричную трактовку функции перехода. Все понятия и определения настоящей статьи, за исключением введенных впервые, берутся из работ [2–4, 6]. Результаты статьи легко распространяются на случай N-мерных структур.

В статье приняты следующие обозначения:

$\mathbf{M}(M)$ — мощность произвольного множества M;

$\mathbf{ST}(2, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{S}_0)$ — двумерное сотообразное пространство, где R — множество конечных автоматов-сот, S — множество состояний автомата, $\mathrm{S}_0 \in \mathrm{S}$ — состояние покоя, причем количество элементов множества S равно s;

$\mathbf{L}$ — функция перехода в пространстве $\mathbf{ST}(2, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{S}_0)$;

$\mathbf{ST}(2, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{S}_0, \mathbf{L})$ — двумерная сотообразная структура;

$\mathrm{S}(i, j, T)$ — состояние автомата (i, j) из $\mathbf{ST}(2, \mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{S}_0)$ в момент T;

$\mathrm{S}_{m^2}(i, j, T)$ — конфигурация в момент T m^2 автоматов*, $\langle m \rangle$-соседних с автоматом (i, j);

$\mathrm{S}^{l}_{m^2}(i, j, T)$ — l-ная конфигурация произвольным образом упорядоченного множества всевозможных $\mathrm{S}_{m^2}(i, j, T)$;

* Здесь для простоты через m^2 обозначается $(2m+1)^2$ автоматов, находящихся в «радиусе» m от автомата (i, j), включая и его самого.

$S^0_{m^2}(i, j, T)$ — такая $S_{m^2}(i, j, T)$, когда все m^2 автоматов $\langle m\rangle$-соседних с автоматом (i, j) и он сам находятся в состоянии $S_0 \in S$;

КФ — конфигурация произвольного блока $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L})$;

СКФ — самовоспроизводящаяся конфигурация;

НКФ — неконструируемая конфигурация;

СТКФ — стираемая конфигурация;

КФ(A, T) — конфигурация блока A в момент T;

$B(X)$ — произведение X-в;

$B(X/У, \ldots, H)$ — произведение X-в, содержащее по крайней мере по одному $У, \ldots, H$;

СДДА — соответствующий друг другу автомат

За исключением вышеприведенных, все остальные обозначения статьи соответствуют работе [5].

1. Обратимся теперь к некоторым вопросам, которые специфичны только для самовоспроизводящихся автоматов. Одним из них является вопрос, который рассматривал еще Дж. фон Нейман: насколько сложным должен быть самовоспроизводящийся автомат?

В случае $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L})$ этот вопрос может принять следующий вид: *при каком* $s' = \min \mathbf{M}(S)$ *в* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L})$ *еще могут существовать нетривиальные* **СКФ**? Опыт решения такого рода задач минимизации говорит о том, что было бы невероятно трудно, или даже вовсе невозможно, найти минимальное значение $\mathbf{M}(S)$ и доказать, что оно действительно минимально. Однако в некоторых случаях можно получить оценку минимальной сложности для $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L})$.

Введем в $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0)$ систему координат следующим образом. Так как $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0)$ можно представить в виде двумерной плоскости, разбитой бесконечной квадратной сеткой на соты, в которых находится по конечному автомату, то каждому конечному автомату-соте в пространстве $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0)$ можно поставить в соответствие упорядоченную пару (i, j). На протяжении всей статьи $<m>$-соседями автомата (i, j) мы будем считать все те автоматы, у которых координаты либо совпадают с (i, j), либо отличаются от них не более, чем на m единиц. Все вышесказанное легко переносится на E^N-пространство.

Определение 1. Если функция перехода $\mathbf{L}$** нелинейна и такова, что

$$S(i, j, T) = \mathbf{L}\{S(k, l, T-1)\}$$

$$(k = \overline{i-m,\ i+m};\quad l = \overline{j-m,\ j+m};\quad i, j = 0, \pm 1, \ldots;\ T = 1, 2, \ldots),$$

то $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L})$ называется $\langle m\rangle$-н е л и н е й н о й структурой.

Пусть в $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0)$ множество S имеет вид: $\{s_1, s_2, s_0\}$. Функцию перехода $\mathbf{L}$ зададим следующим образом:

$$S(i, j, T) = \sum_{l=j}^{j+1} S(i-1, l, T-1) + S(i-1, j-1, T-1) \prod_{\substack{k=i\\ l=j-1}}^{\substack{i+1\\ j+1}} S(k, l, T-1) \tag{1}$$

$$(k = \overline{i-1,\ i+1};\ l = \overline{j-1,\ j+1};\ i, j = 0, \pm 1, \ldots;\ T = 1, 2, \ldots).$$

** Нелинейность $\mathbf{L}$ рассматривается здесь в смысле нелинейности заданных на множестве S операций.

На множестве S зададим следующие операции:

$$E(s_1)=s_1,\ B(s_2)=s_2,\ s_2+s_0=s_1+s_2=s_2+s_1=s_2,\ s_0+s_0=s_0,$$
$$s_1+s_0=s_2+s_2=s_1+s_1=s_1 \tag{2}$$
$$E(s_1/s_0)=B(s_2/s_0)=B(s_1/s_2)=s_0,\ B(s_0)=B(s_1/s_2,\ s_0)=s_0.$$

Тогда, если в (1) положить $S(i—1, l, T—1) = S(k, l, T—1) = s_0$, то и $S(i, j, T)=s_0$. Следовательно, функция перехода **L**, заданная соотношениями (1)—(2), определяет ⟨1⟩-нелинейную структуру. Легко показать, что если в момент $T=0$ в такую структуру, все автоматы-соты которой находятся в состоянии s_0, поместить **КФ**, заданную таблицей состояний (см. табл. 1), то такая **КФ** будет **СКФ**. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

						s_2	$i+6$
					s_2	s_2	$i+5$
				s_2	s_1	s_2	$i+4$
			s_2	s_2	s_2	s_2	$i+3$
		s_2	s_1	s_1	s_1	s_2	$i+2$
	s_2	s_2	s_1	s_1	s_2	s_2	$i+1$
s_2	s_1	s_2	s_1	s_2	s_1	s_2	i
j	$j+1$	$j+2$	$j+3$	$j+4$	$j+5$	$j+6$	$s(i,j,o)$

Таблица 1.

Теорема 1. *В ⟨1⟩-нелинейной* **ST**(2, R, S, S₀, **L**) с **M**(S)=3 *могут существовать* **СКФ**.

2. Рассмотрим теперь вопрос о неконструируемых конфигурациях. В настоящем пункте мы будем иметь дело с такими ⟨*m*⟩-соседями автомата (i, j), для которых $m=1$. Пусть в **ST**(2, R, S, S_0, **L**) существуют **НКФ**. *Каков тогда должен быть размер наименьшего квадратного блока,* содержащего **НКФ**?

Возьмем в **ST**(2, R, S, S_0) блок B_0 размера $n_0\times n_0$ и блок C_0 размера $p_0\times p_0$, где $p_0<n_0—1$. Если **L** такова, что существует разбиение пространства **ST**(2, R, S, S_0) квадратной сеткой с ячейками B_0 размера $n_0\times n_0$ такое, что

$$\mathbf{L}: \mathbf{КФ}(B_0, T—1) \longrightarrow \mathbf{КФ}(B_0, T),$$

причем (B_0) (**КФ**$(C_0, T)\in$**КФ**(B_0, T)), где **КФ**(C_0, T) может зависеть от T, то такую **L** будем называть (n_0, p_0)-с в о д я щ е й.

Определение 2. Пространство **ST**(2, R, S, S_0) с (n_0, p_0)-сводящей функцией перехода **L** называется (n_0, p_0)-структурой.

Рассмотрим подробнее (n_0, p_0)-структуру. Возьмем в такой структуре блок A размера $kn_0\times kn_0$. В момент $T—1$ блок A может иметь $s^{(kn_0)^2}$ возможных **КФ**. Зная состояния автоматов внутри блока A в момент $T—1$, мы можем определить состояния автоматов в момент T только внутри блока A′ размера $(kn_0—2)\times(kn_0—2)$, так как определить состояния автоматов на границе блока A в момент T мы не можем вследствие зависимости их от состояний автоматов в момент $T—1$ вне блока A. Следовательно, для блока A′ число возможных **КФ** в момент T равно $s^{(kn_0-2)^2}$. Тогда число потерь **КФ** блоком A в момент T за счет сокращения границы блока равно

$$\Delta_1(\mathbf{КФ}) = s^{(kn_0)^2} — s^{(kn_0-2)^2}. \tag{3}$$

Так как **ST**(2, R, S, S_0, **L**) является по условию (n_0, p_0)-структурой, то в каждом блоке размера $n_0\times n_0$ в момент T содержится по одной идентичной **КФ** блока C_0 размера $p_0\times p_0$.

С учетом сказанного, оценим теперь число возможных **КФ**(A, T). Как легко показать, блок C_0 можно разместить $(n_0—p_0+1)^2$ различными способами в блоке размера $n_0\times n_0$. А так как число блоков размера $n_0\times n_0$ в блоке А равно k^2, то число способов размещения блоков C_0 по блокам размера $n_0\times n_0$ блока А равно $(n_0-p_0+1)^{2k^2}$. Тогда число возможных **КФ**(А, T) при фиксированной **КФ**$_0$ блока C_0, очевидно, равно $(n_0-p_0+1)^{2k^2}\cdot s^{(kn_0)^2-(kp_0)^2}$. А так как сам блок C_0 может иметь $s^{p_0^2}$ возможных **КФ**, то общее число возможных **КФ**(А, T) будет равно $(n_0-p_0+1)^{2k^2}\cdot s^{(kn_0)^2-(kp_0)^2+p_0^2}$. Следовательно, число потерь **КФ** блоком А в момент T в связи с тем, что **ST**(2, R, S, S_0, **L**) является (n_0, p_0)-структурой, равно

$$\Delta_2(\mathbf{К\Phi}) = s^{(kn_0)^2} - (n_0-p_0+1)^{2k^2}\cdot s^{(kn_0)^2-(kp_0)^2-p_0^2}. \tag{4}$$

Покажем теперь, что существует такое достаточно большое число $k>0$, что $\Delta_2(\mathbf{К\Phi})>\Delta_1(\mathbf{К\Phi})$. Используя (3)—(4) и проведя несложные преобразования, получаем следующее неравенство:

$$(k^2-1)p_0^2-2k^2\log_s(n_0-p_0+1)>4(kn_0-1). \tag{5}$$

Легко показать, что если $n_0-p_0<s^{p_0^2/2}-1$, то существует такое число $k_0>0$, что для всех $k\geqslant k_0$ неравенство (5), а с ним и неравенство $\Delta_2(\mathbf{К\Phi})>$ $>\Delta_1(\mathbf{К\Phi})$, будет выполняться.

Следовательно, должна существовать такая **КФ**(А′, T), которую нельзя получить ни из какой **КФ** блока А в момент T—1. Эта **КФ** и есть **НКФ**. Она соответствует машине, которую можно описать как совокупность ряда элементов, но которую нельзя построить из этих элементов. Поскольку эта **КФ** не может возникнуть путем воспроизведения, то она не в состоянии воспроизводить себя.

Рассмотрим теперь непосредственно вопрос о минимальном блоке, содержащем **НКФ**. Для этого положим в (5) $p_0=n_0-2$, так как $p_0<n_0-1$. Получаем

$$(k^2-1)(n_0-2)^2-2k^2\log_s 3>4(kn_0-1). \tag{6}$$

Ради простоты можно положить в (6) $s=3^{2k^2}$, так как s может принимать любое значение из интервала $2\leqslant s<\infty$. Тогда (6) принимает вид

$$(k^2-1)(n_0-2)^2>4kn_0-3. \tag{7}$$

Полагая теперь $n_0=5$, получаем, что для всех $k\geqslant 3$ неравенство (7) будет выполняться. Отсюда уже легко получаем, что наименьший блок в (n_0, p_0)-структуре не должен превышать размера 15×15. Этим доказана

Теорема*** 2. *Если для* (n_0, p_0)*-структуры* **ST**(2, R, S, S_0, **L**) *справедливо неравенство*

$$n_0-p_0<s^{p_0^2/2}-1,$$

то в ней существуют **НКФ**. *Размер наименьшего блока, содержащего* **НКФ**, *не превышает* 15×15.

Наша теорема дает теоретический размер наименьшего блока для **НКФ** намного меньший, чем теорема 2 Э. Мура из [4]. Теорема 2 дает также новое условие существования в **ST**(2, R, S, S_0, **L**) **НКФ**.

3. Определенный интерес представляет следующий вопрос: *может ли структура иметь* **СКФ**, *не имея при этом* **СТКФ**? Оказывается, что да. Приведем пример такой структуры.

*** Улам в [7] ставит проблему, в некоторой степени аналогичную проблеме, решенной данной теоремой 2.

Множество S зададим из трех элементов: $\{s_1, s_2, s_0\}$. Функцию перехода **L** в **ST**(2, R, S, S_0) зададим следующим образом:

$$\mathbf{L}: S(i, j, T) = \prod_{l=j}^{j+1} S(i-1, l, T-1) \qquad (8)$$
$$(i, j = 0, \pm 1, \ldots;\ T = 1, 2, \ldots).$$

На множестве состояний S определим следующие операции:

$$B(s_i) = s_i, \qquad B(s_i/s_j) = s_k, \qquad (i, j, k = \overline{0,2}). \qquad (9)$$

Очевидно, что заданная соотношениями (8)—(9) функция перехода **L** определяет **ST**(2, R, S, S_0, **L**). Легко показать, что в такой структуре существуют **СКФ**, по сложности не уступающие **КФ**, заданной таблицей состояний (табл. 2) в момент $T=0$.

		s_1	$i+2$
	s_0	s_2	$i+1$
s_1	s_1	s_1	i
j	$j+1$	$j+2$	$S(i,j,0)$

Таблица 2.

Покажем теперь, что в нашей структуре не могут существовать **СТКФ**. Предположим, что в момент $T-1$ в **ST**(2, R, S, S_0) существуют два непересекающихся, одинаково разбитых на подблоки и одинаковых по размерам блока (см. рис. 1) таких, что **КФ**$(G, T-1) =$ **КФ**$(G', T-1)$, **КФ**$(H, T-1) =$ **КФ**$(H', T-1)$ и **КФ**$(F, T-1) \neq$ **КФ**$(F^*, T-1)$. Так как **КФ**$(F, T-1) \neq$ **КФ**$(F^*, T-1)$, то существует по крайней мере по одной соответствующей друг другу строке автоматов в блоках F и F^*, **КФ** которых различны, т. е. в этих строках имеется по крайней мере по одному **СДДА** s' и s^*, находящихся в различных состояниях из множества S. Возьмем две такие строки из блоков F и F^* (см. рис. 2).

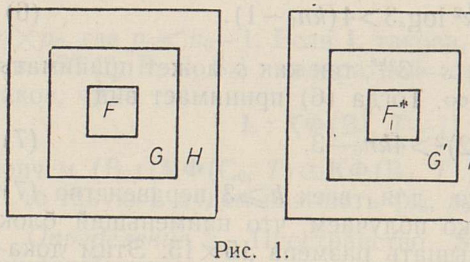

Рис. 1.

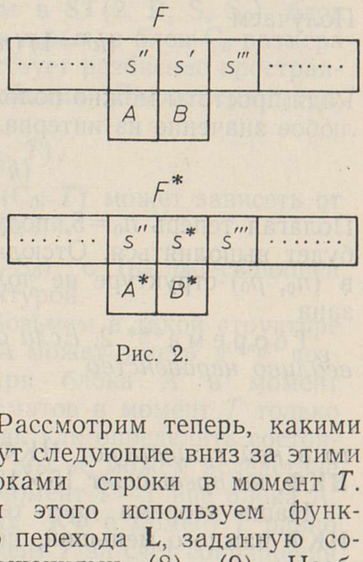

Рис. 2.

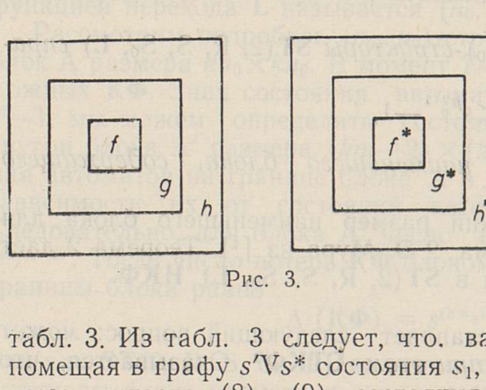

Рис. 3.

Рассмотрим теперь, какими будут следующие вниз за этими строками строки в момент T. Для этого используем функцию перехода **L**, заданную соотношениями (8)—(9). Необходимые результаты сведем в табл. 3. Из табл. 3 следует, что, варьируя пары состояний (s'', s''') и помещая в графу $s' \vee s^*$ состояния s_1, s_2 или s_0, мы в графах s_1, s_2, s_0 получаем, согласно (8)—(9), состояния двух пар автоматов AB и A*B* в момент T в строках, расположенных вслед за рассмотренными строками автоматов.

Легко заметить, что ни при какой вариации пары (s'', s''') и $s' \neq s^*$ в соответствующих строках табл. 3 не могут возникнуть одинаковые конфигурации блоков AB и A*B* в момент T. Из этого непосредственно следует, что блоки FVG и F^*VG' (см. рис. 1) нашей **ST**(2, R, S, S_0, **L**) не могут в момент T перейти соответственно в блоки, вид которых изображен на рис. 3, т. е. для которых **КФ**$(g, T) =$ **КФ**(g^*, T) и **КФ**$(f, T) =$ **КФ**(f^*, T). А это, как следует из определения **СТКФ** [4], приводит к невозможности существования в нашей структуре такого типа **КФ**. Этим доказана следующая

s''	$s' \vee s^*$	s'''	s_1		s_2		s_0	
s_1	$s_1 \vee s_2 \vee s_0$	s_1	s_1	s_1	s_0	s_0	s_2	s_2
s_1		s_2	s_1	s_0	s_0	s_2	s_2	s_1
s_1		s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0
s_2		s_2	s_0	s_0	s_2	s_2	s_1	s_1
s_2		s_0	s_0	s_2	s_2	s_1	s_1	s_0
s_2		s_1	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1	s_2
s_0		s_1	s_2	s_1	s_1	s_0	s_0	s_2
s_0		s_2	s_2	s_0	s_1	s_2	s_0	s_1
s_0		s_0	s_2	s_2	s_1	s_1	s_0	s_0

Таблица 3.

Теорема 3. *Структура* **ST**(2, R, S, S_0, **L**), *имеющая* **СКФ**, *может не иметь при этом* **СТКФ**.

4. Подсчитаем теперь число определенного вида структур и дадим для некоторых типов структур оценки их количества.

Согласно нашему определению функции перехода **L** в **ST**(2, R, S, S_0) справедливо, что

$$\mathbf{L} : S_{m^2}(i, j, T-1) \longrightarrow S(i, j, T) \in S.$$

Функция перехода **L** не устанавливает взаимно-однозначного соответствия между множествами $S_{m^2}(i, j, T-1)$ и $S(i, j, T)$. Мы будем предполагать, что **L** постоянна для всего пространства **ST**(2, R, S, S_0). Так как **ST**(2, R, S, S_0) с заданной в нем **L** полностью определяет **ST**(2, R, S, S_0, **L**), то естественно, что число структур при определенном множестве S равно числу всевозможных функций перехода **L** в **ST**(2, R, S, S_0).

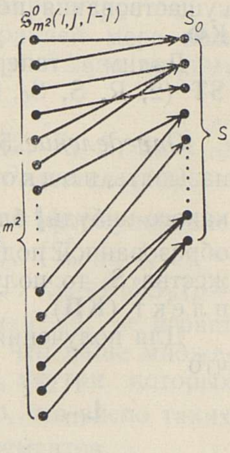

Рис. 4.

Определение 3. Структуры **ST**(2, R, S, S_0, $\mathbf{L}_{(m)}$) и **ST**(2, R, S, S_0, $\mathbf{L}'_{(m)}$) называются $\langle m\rangle$-различными, если функции перехода $\mathbf{L}_{(m)}$ и $\mathbf{L}'_{(m)}$ таковы, что

$$(\exists l) \quad \begin{matrix} \mathbf{L}_{(m)} : S^l_{m^2}(i, j, T-1) \longrightarrow S_p \in S \\ \mathbf{L}'_{(m)} : S^l_{m^2}(i, j, T-1) \longrightarrow S_p' \in S \end{matrix} \qquad p \neq p'$$

$$(l = \overline{1, s^{m^2}};\ p, p' = \overline{0, s-1}).$$

Подсчитаем теперь число таких **ST**(2, R, S, S_0, $\mathbf{L}_{(m)}$). Легко показать, что число возможных $S_{m^2}(i, j, T-1)$ равно S^{m^2}, число возможных S_p равно s. Очевидно, что тогда число структур равно числу возможных способов соединения s^{m^2} точек (возможных $S_{m^2}(i, j, T-1)$) с s точками (возможными $S(i, j, T)$) при фиксированном соединении s_0 с $S^0_{m^2}(i, j, T-1)$. На рис. 4 приведен один из возможных способов такого соединения.

Установим взаимно-однозначное соответствие между множеством S и группой из s множеств $N_i : S_i \leftrightarrow N_i (i=\overline{0, s-1})$, где N_i составлены из элементов множества возможных $S_{m^2}(i, j, T-1)$ так, что

$$\mathbf{M}(\bigcup_i N_i) = s^{m^2} \quad \bigcap_i N_i = 0 \quad N_0 \neq 0. \tag{10}$$

Множество N_0 содержит по крайней мере один элемент $S^0_{m^2}(i, j, T-1)$. Равенство $\bigcap_i N_i = 0$ является условием детерминированности функции перехода $\mathbf{L}_{(m)}$.

С учетом вышесказанного, задача принимает следующий вид: сколькими способами можно разбить множество возможных $S_{m^2}(i, j, T-1)$ на s подмножеств, удовлетворяющих условиям (10)?

После довольно простых рассуждений получаем, что число таких способов разбиения множества возможных $S_{m^2}(i, j, T-1)$ равно

$$\sum_{p_0+\ldots+p_{s-1}=s^{m^2}-1} C^{p_0}_{s^{m^2}-1} \prod_{i=1}^{s-1} C^{p_i}_{s^{m^2}-\left(1+\sum\limits_{k=0}^{i-1} p_k\right)} = S^{s^{m^2}-1}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Число* $\langle m\rangle$*-различных* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(m)})$ *равно* $M_{(m)} = s^{s^{m^2}-1}$.

Определение 4. Структура называется **СТКФ**-восприимчивой, если функция перехода $\mathbf{L}_{(m)}$ такова, что в структуре имеется возможность существования по крайней мере хоть одной пары взаимно стираемых КФ.

Дадим теперь оценку снизу числу **СТКФ**-восприимчивых **ST** $(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$. Нам потребуется еще следующее

Определение 5. Девять различных $S^{l_k}_{m^2}(i, j, T)$ $(m^2=9;\ k=\overline{1,9})$ будем называть подкомплектом, если из них можно образовать **КФ** какого-нибудь блока размера 5×5 в **ST**(2, R, S, S_0). Если в $S^{l_k}_{m^2}(i, j, T)$, образованной подкомплектом, придавать автомату (i, j) значения из множества S, то получаем s различных подкомплектов, образующих комплект (**КП**).

Для получения оценки подсчитаем число функций перехода $\mathbf{L}_{(1)}$ таких, что

$$\mathbf{L}_{(1)} \begin{array}{l} : \ S^l_{m^2}(i, j, T-1) \in \mathbf{КП} \longrightarrow S_p \in S \\ : \ S^k_{m^2}(i, j, T-1) \in \mathbf{КП} \longrightarrow S_p \in S \end{array} \left(\begin{array}{l} l, \mathbf{k} = \overline{1, 9s} \\ p = \overline{0, s-1} \end{array}\right), \tag{11}$$

если геометрическое произведение $S^l_{m^2}(i, j, T-1) \cap S^k_{m^2}(i, j, T-1)$ содержит только m^2-1 автомат.

Оценку числа $\mathbf{L}_{(1)}$, удовлетворяющих (11), найдем следующим образом. Выберем какой-либо комплект, не содержащий $S^0_{m^2}(i, j, T)$ $(m^2=9)$. Такой комплект содержит $9s$ различных **КФ** блока размера 3×3. Выберем в нашем комплекте пару подкомплектов. Согласно определению 4, соответствующие друг другу (**СДД**) **КФ** этой пары подкомплектов (в смысле их расположения в образуемых ими **КФ** блоков размера 5×5) отличаются лишь **СДДА**. Теперь легко заметить, что для возможности существования в **ST**(2, R, S, S_0, $\mathbf{L}_{(1)}$) **СТКФ** с блоками F и F^* (рис. 1) размером в один автомат достаточно, чтобы $\mathbf{L}_{(1)}$ переводила **СДД КФ** нашей пары в момент $T-1$ в одно и то же состояние автомата в момент T.

Зададим $L_{(1)}$ так, что:

а) $S^0_{m^2}(i, j, T-1) \longrightarrow S(i, j, T) = S_0$;

б) **СДД КФ** пары подкомплектов нашего **КП** переводятся в одни и те же состояния $S_p (S_p \neq S_0)$;

в) остальные **КФ** множества $S^l_{m^2}(i, j, T-1)$ $(m^2=9;\ l=\overline{1, S^9})$ переводятся в состояния S_p автомата (i, j), причем

$$(\forall p),\ (\exists \text{КФ})\,(L_{(1)}: \text{КФ} \longrightarrow S_p)\,(p=\overline{0, S-1}).$$

Из (а) следует, что $L_{(1)}$ переводит одну **КФ** множества $S^l_{m^2}(i, j, T-1)$ в состояние S_0. Остается, очевидно, s^9-1 **КФ**. Из (б) следует, что $L_{(1)}$ переводит каждую из 9 пар **КФ** пары подкомплектов какого-либо **КП** в состояния $S_p (S_p \neq S_0)$. По теореме 4 существует $(s-1)^9$ такого типа переводов. Теперь уже остается s^9-19 **КФ** множества $S^l_{m^2}(i, j, T-1)$, которые, согласно (в), переводятся в состояния S_p автомата (i, j) при условии, что $(\forall p)$, $(\exists \text{КФ})\,(L_{(1)}: \text{КФ} \longrightarrow S_p)$. Как легко показать, число таких переводов равно

$$A = \sum_{(\forall i)(m_i \geqslant 1)}^{\sum m_i = s^9-19} C^{m_1}_{s^9-19} \prod_{i=2}^{s-1} C^{m_i}_{s^9-\left(19+\sum\limits_{k=1}^{i-1} m_k\right)}. \tag{12}$$

Учитывая теперь, что вышесказанным гарантируется в $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, L_{(1)})$ возможность существования по крайней мере хоть **СТКФ** с блоками F и F^* размером в один автомат, и учитывая теорему 4, мы получаем доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 5. *Число* **СТКФ**-*восприимчивых* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, L_{(1)})$ *удовлетворяет неравенствам:* $A \leqslant M < s^{s^9-1}$, *где* A *определяется* (12).

Зададим теперь функцию перехода $L_{(m)}$ в матричной формулировке. Упорядочим множество всевозможных $S_{m^2}(i, j, T): \{S^0_{m^2}(i, j, T) = \underline{= S^1_{m^2}}(i, j, T)\ \&\ S^k_{m^2}(i, j, T)\ (k=\overline{2, s^{m^2}})\}$ и множество $S: \{S_0 = S_1 \& S_p\ (p=\overline{2, s})\}$. Так как вид упорядочения множества $S_{m^2}(i, j, T)$ не играет существенной роли, то в дальнейшем предполагается, что наше множество состоит из последовательных групп $S_{m^2}(i, j, T)$, внутри которых $S^l_{m^2}(i, j, T)$ отличаются только одним **СДДА**. Очевидно, что число таких групп равно s^{m^2-1}, а в каждой группе содержится s элементов.

Зададим матрицу $L_{(m)} = (l_{(m)kp})$ порядка $s^{m^2} \times s$ следующим образом: $l_{(m)11} = 1\ \&\ (l_{(m)kp} = 1 \leftrightarrow S^k_{m^2}(i, j, T-1) \longrightarrow S_p \in S)$, иначе $l_{(m)kp} = 0$ $(k=\overline{2, s^{m^2}};\ p=\overline{1, s})$. Легко показать, что заданная таким образом матрица $L_{(m)}$ определяет функцию перехода в $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0)$. В дальнейшем такую матрицу $L_{(m)}$ будем называть м а т р и ц е й п е р е х о д а. В терминах матриц перехода $L_{(m)}$ многие вопросы $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, L_{(m)})$ принимают более прозрачный вид.

Определение 6.

а) Пусть $L_{(m)} = (l_{(m)kp})\ \&\ (\forall k)\,(\sum\limits_p l_{(m)kp} = 1)$. Тогда, если $(\exists p)$ $(\sum\limits_k l_{(m)kp} = 0)$, то такая $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, L_{(m)})$ называется д е ф е к т н о й структурой, в противном случае она называется полной структурой. Если $\sum_k l_{(m)k1}=1$, то матрица перехода $L_{(m)}$ определяет непримитивную структуру, в противном случае она определяет примитивную структуру.

б) Если $(\forall k)\,(\sum_p l_{(m)kp} \leqslant 1)\ \&\ (\exists k)\,(\sum_p l_{(m)kp}=0)$, то такая матрица перехода $L_{(m)}$ определяет вырожденную структуру.

в) Если $(\exists k)\,(\sum_p l_{(m)kp}>1)$, то матрица перехода $L_{(m)}$ определяет ветвящуюся структуру.

Лемма 1. *Для того, чтобы* $L_{(1)}=(l_{(1)ij})\ (i=\overline{1, s^9};\ j=\overline{1, s})$ *определяла полную структуру, необходимо, чтобы* $\sum_{i,j} l_{(1)ij} = s^9$. *При* $\sum_{i,j} l_{(1)ij}>s^9$ *матрица перехода* $L_{(1)}$ *определяет ветвящуюся структуру и при* $\sum_{i,j} l_{(1)ij}<s^9$ *она может определять как ветвящиеся, так и вырожденные структуры.*

Доказательство леммы не вызывает затруднений.

Докажем теперь теорему, которая дает достаточные условия существования в **ST**$(2, R, S, S_0, L_{(m)})$ **НКФ**.

Теорема 6. *Для того, чтобы в* **ST**$(2, R, S, S_0, L_{(m)})$ *существовали* **НКФ**, *достаточно чтобы:*

а) *Структура являлась дефектной или непримитивной;*

б) $(E!p)\,(L_{(m)}: S^p_{m^2}(i, j, T-1) \longrightarrow \overline{S}(i, j, T)=S(i, j, T-1) \neq S_0)$, *причем, ни один автомат* $S^p_{m^2}(i, j, T-1)$, кроме (i, j)*-го, не находился в состоянии* $S(i, j, T-1)$.

Доказательство. а) Из определения 6 следует, что дефектная структура определяется такой матрицей перехода $L_{(m)}$, что

$$(\exists p),\ (\forall S_{m^2}(i, j, T-1))\,(S_{m^2}(i, j, T-1) \not\longrightarrow S(i, j, T)=S_p\in S).$$

Следовательно, любая **КФ**, содержащая автоматы в состоянии S_p, может существовать в такой структуре только в момент $T=0$. Непримитивная же структура определяется такой матрицей перехода $L_{(m)}$, что

$$L_{(m)}: S_{m^2}(i, j, T-1)\longrightarrow S(i, j, T)=S_0 \leftrightarrow S_{m^2}(i, j, T-1) = S^0_{m^2}(i, j, T-1).$$

Тогда легко показать, что уже **КФ** блока, содержащая автомат в состоянии отличном от S_0, у которого все остальные $\langle m\rangle$-соседи находятся в состоянии S_0 (так наз. изолированный автомат-клетка), может существовать только в момент $T=0$. Используя теперь определение **НКФ** [4], получаем доказательство пункта (а) теоремы.

б) Предположим теперь, что $L_{(m)}$ в структуре такова, что

$$L_{(m)}: S_{m^2}(i, j, T-1)\longrightarrow S(i, j, T) = S_p\neq S_0$$

только для одной $S_{m^2}(i, j, T-1)$ такой, что $S(i, j, T-1) = S_p\neq S_0$, а все ее остальные автоматы в момент $T-1$ находятся в отличных от S_p состояниях. В этом случае, как легко показать, в момент T ни из какой **КФ** нельзя получить такую **КФ**, у которой по крайней мере хоть один $\langle m\rangle$-соседний автомат автомата (i, j) и сам автомат (i, j) находились бы в одном и том же состоянии $S_p\neq S_0$. То есть, такая **КФ** может существовать только в момент $T=0$. Этим мы завершаем доказательство нашей теоремы. Из теоремы 6 легко вытекает следующее

Следствие 1. *В дефектных* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(m)})$ **НКФ** *могут существовать в блоке любого размера, а в полных* $\mathbf{ST}\ (2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ *в блоках размера* 2×2. *В* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ *существуют* **НКФ** *размером в один автомат, тогда и только тогда, когда* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ *является дефектной.*

Интерес представляет вопрос об оценках числа структур, обладающих **НКФ**. Из теоремы 6 следует, что если при $m^2=9$ и $S(i, j, T-1)=S_k\in S$ функция перехода $\mathbf{L}_{(1)}$ такова, что

$$(E!S_{m^2}(i, j, T-1))\ (\mathbf{L}_{(1)} : S_{m^2}(i, j, T-1)\rightarrow S(i, j, T) = S(i, j, T-1) = S_k),$$

причем ни один автомат в $S_{m^2}(i, j, T-1)$ не находится в состоянии S_k, кроме (i, j)-го, то в такой $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ существуют **НКФ**.

Используя это, легко оценить снизу число структур, обладающих **НКФ**. Предположим, что в $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$ функция перехода $\mathbf{L}_{(1)}$ такова, что автомат (i, j) переходит в момент T в состояние S_k тогда и только тогда, когда состояние только автомата (i, j) в $S_{m^2}(i, j, T-1)$ равно S_k. Как легко показать, число таких структур равно $(s-1)^{s^9-2}$. Используя теперь теорему 4, получаем доказательство следующей теоремы.

Теорема 7. *Число* $\mathbf{ST}(2, R, S, S_0, \mathbf{L}_{(1)})$, *обладающих* **НКФ**, *удовлетворяет неравенствам* $(s-1)^{s^9-2}\leqslant N< s^{s^9-1}$.****

В заключение статьи рассмотрим следующую задачу: *может ли структура иметь* **СТКФ** *с внутренним блоком* (**ВБ**) *размером более чем в один клеточный автомат* (**КА**), *не имея при этом* **СТКФ** *с* **ВБ** *размером в один* **КА**?

Обозначим через $S_{\langle i,j\rangle}(k, T)$ состояние k-го **КА**, а через $\hat{S}_{\langle j,i\rangle}(T)$ — состояние автомата, находящегося в верхнем правом углу блока $S_{m^2}(i, j, T)$.

Рассмотрим структуру $\mathbf{ST}^*$ следующего вида. Множество состояний задано в виде $S : \{S_0=0, 1, \ldots, p\}$, а функция перехода такова, что

$$\mathbf{L}^* : S_{m^2}(i, j, T)\rightarrow S(i, j, T+1)=p,$$

тогда и только тогда, когда только $\hat{S}_{\langle j,i\rangle}(T)=p$, иначе

$$\mathbf{L}^* : S_{m^2}(i, j, T)\rightarrow S(i, j, T+1)=\oplus\sum_k S_{\langle i,i\rangle}(k, T)\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Заданием множества S и функции перехода $\mathbf{L}^*$ мы полностью определяем структуру $\mathbf{ST}^*$. Согласно теореме из [8] наша $\mathbf{ST}^*$ обладает **НКФ**.

Покажем теперь, что в $\mathbf{ST}^*$ не могут существовать **СТКФ** с **ВБ** размером в один **КА**. Пусть в $\mathbf{ST}^*$ в момент $T>0$ существуют две непересекающиеся конфигурации вида, представленного на рис. 1. Положим, что блоки F и F^* имеют размер в один **КА** и $\mathbf{КФ}(F, T)\neq\mathbf{КФ}(F^*, T)$, а $\mathbf{КФ}(G, T) = \mathbf{КФ}(G', T)$ и $\mathbf{КФ}(H, T)=\mathbf{КФ}(H', T)$. Рассмотрим теперь, каковы будут $S(F, T+1)$ и $S(F^*, T+1)$. В момент $T>0$ может быть только два случая:

1. $(S(F, T) \vee S(F^*, T))=p$,
2. $(S(F, T) \& S(F^*, T))\neq p$.

1 случай. Пусть для определенности $S(F, T)=p$. Тогда блок G не может содержать **КА** в состоянии p, так как в противном случае **КФ**

**** В [9] нижняя оценка для N улучшена до $\frac{s+2}{s-2}(s-1)^{s^9-1}$.

блока $F+G$ была бы **НКФ** [8]. Используя теперь функцию $\mathbf{L}^*$, легко получаем

$$\mathbf{L}^*: \mathbf{К\Phi}(F, T) \to S(F, T+1) = p,$$

$$\mathbf{L}^*: \mathbf{К\Phi}(F^*, T) \to S(F^*, T+1) \neq p,$$

т. е. $S(F, T+1) \neq S(F^*, T+1)$.

2 случай. Незначительно изменив рассуждения первого случая, легко показать, что и тогда $S(F, T+1) \neq S(F^*, T+1)$. Обращаясь теперь к определению **СТКФ**, нетрудно уже получить, что в **ST*** не могут существовать **СТКФ** (как в смысле Мура [4], так и в смысле Майхилла [10]) с **ВБ** размером в один **КА**. А так как **ST*** является структурой с существующими в ней **НКФ**, то, используя теорему Майхилла [10], получаем доказательство следующего предложения.

Предложение. *Структура может иметь* **СТКФ** *с внутренним блоком размером более чем в один автомат, не имея при этом* **СТКФ** *с внутренним блоком размером в один автомат; при условии рассмотрения* **КФ** *в структуре в смысле Майхилла.*

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Р. Полуэктову за обсуждение статьи и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Дж. фон, Общая и логическая теория автоматов. В кн.: А. Тьюринг, Может ли машина мыслить?, М., 1960, с. 59—101.
2. Бёркс А. У., Вычисление, поведение и структура неизменных и растущих автоматов. В кн.: Самоорганизующиеся системы, М., 1964, с. 381—417.
3. Мур Э. Ф., Математика в биологии. В кн.: М. А. Арбиб, Мозг, машина и математика, М., 1968, с. 196—216.
4. Мур Э. Ф., Математические модели самовоспроизведения. В кн.: Математические проблемы в биологии, М., 1966, с. 36—62.
5. Николау Э., Введение в кибернетику, М., 1967.
6. Лофгрен Л., О понятии самовосстановления, границах избыточности сетей и пропускной способности канала вычислений. В кн.: Теория конечных и вероятностных автоматов, М., 1965, с. 343—370.
7. Улам С., Нерешенные математические задачи, М., 1964, с. 44—45.
8. Аладьев В., Одна теорема теории сотообразных структур. Изв. АН ЭССР, физ.-матем., **19**, № 3 (1970).
9. Аладьев В., Некоторые оценки для структур Неймана—Мура. Изв. АН ЭССР, физ.-матем., 1971 (в печати).
10. Myhill J., The Converse of Moore's Carden-of-Eden Theorem, Proc. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., **14**, № 4, 685—686 (1963).

Институт экспериментальной биологии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/XI 1969

V. ALADJEV

KÄRGSTRUKTUURIDE TEOORIA MÕNINGAID KÜSIMUSI

Resümee

Artikli esimeses punktis vaadeldakse autoreproduktiivse konfiguratsiooniga kärgstruktuuride keerulisuse probleemi, teises antakse hinnang minimaalsele blokile, mis sisaldab konstrueerimatuid konfiguratsioone, kolmandas vaadeldakse autoreprodutseeruvate konfiguratsioonide olemasolu küsimust struktuuris, kus ei eksisteeri kustutatavaid konfiguratsioone, ja neljandas käsitletakse teatud tüüpi kärgstruktuuride arvule antud hinnanguid ning mõningaid teisi struktuuridega seotud küsimusi.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Eksperimentaalbioloogia Instituut

Saabus toimetusse
28. XI 1969

V. ALADYEV

SOME QUESTIONS ARISING IN THE THEORY OF HONEYCOMB STRUCTURES

Summary

This article concerns some questions of honeycomb structures. In the first item, the question of the complexity of honeycomb structures containing self-reproduction configurations is considered. The second item gives an estimation of minimum block containing non-constructive configurations. In the third item, the question is considered of the existence of self-reproduction configurations in a structure lacking erased configurations. Lastly, the fourth item discusses the estimations of the number of a definite type of honeycomb structures and some other questions connected with those structures.

Academy of Sciences of the Estonian SSR,
Institute of Experimental Biology

Received
Nov. 28, 1969

LÜHITEATEID * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
BIOLOOGIA. 1970, Nr. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
БИОЛОГИЯ. 1970, № 3

I. SIBUL, U. KANARIK, Ü. VAHER

STRESS-ENDOKRIINSÜNDROOMI ARENEMISEST TIBUDEL GAMMAKIIRGUSE TOIMEL

И. СИБУЛЬ, У. КАНАРИК, Ю. ВАХЕР. О РАЗВИТИИ ЭНДОКРИННОГО СТРЕСС-СИНДРОМА ПРИ ГАММА-ОБЛУЧЕНИИ ЦЫПЛЯТ

I. SIBUL, U. KANARIK, Ü. VAHER. ON STRESS-SYNDROME BY CHICK FOLLOWING THEIR GAMMA-IRRADIATION

Viimasel ajal on radiobioloogias tekkinud uus haru — radiatsiooni endokrinoloogia, õpetus ioniseeriva kiirguse mõjul endokriinses süsteemis tekkivatest morfoloogilistest, biokeemilistest ja funktsionaalsetest muutustest ning nende tähtsusest organismi kohanemisreaktsioonides ja kiiritustõve patogeneesis, aga ka väikeste kiirgusdooside mõjul esinevates stimulatsiooninähtudes.

On teada, et loomade kiiritamine subletaalsete doosidega, alates 50—100 röntgenist, põhjustab neerupealiste ja kilpnäärme hüpertroofiat ning