EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED 1955. IV kd., nr. 2
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР 1955. Том IV, № 2

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И СТАТИЧЕСКИМИ СООТНОШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Н. А. АЛУМЯЭ,
член-корреспондент Академии наук Эстонской ССР

При подходящем определении второго тензора деформации оболочки в линейной теории оболочек можно вывести условия равновесия и совместности деформации в форме, в которой эти условия имеют одинаковую структуру. Таковы, например, уравнения (8.2), (5.1) в монографии В. В. Новожилова ([4]). В более общем виде аналогия между статическими и геометрическими соотношениями установлена и в дальнейшем широко использована А. Л. Гольденвейзером ([2,3]) в форме положения о двойственности однородных соотношений линейной теории оболочек ([3]).

В настоящем сообщении указывается на существование некоторой аналогии между условиями равновесия и совместности деформации нелинейной теории оболочек. Изложение относится к одному, выдвинутому автором ([1]) варианту нелинейных соотношений. Оно сопровождается разъяснением физического смысла отдельных величин, входящих в вышеупомянутые соотношения.

1. Геометрические соотношения. Отнесем срединную поверхность недеформированной оболочки S к гауссовым координатам x^1, x^2 и введем следующие обозначения для S:

$\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x^1, x^2), $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$;
$\mathbf{r}_i$ — координатные векторы, $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$;
a_{ij} — основной метрический тензор, $a_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$;
a — дискриминант тензора a_{ij}, $a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
c_{ij} — дискриминантный тензор, $c_{ii} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}$;
$\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, $2\mathbf{n} = c^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta$;
b_{ij} — второй метрический тензор, $b_{ij} = \mathbf{n} \cdot \partial^2\mathbf{r}/\partial x^i \partial x^j$;
∇_j — символ ковариантного дифференцирования в метрике a_{ij}.

Обозначим через $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(x^1, x^2)$ радиус-вектор точки (x^1, x^2) срединной поверхности после деформации S_* и через $\mathbf{r}_i^* = \partial\mathbf{r}^*/\partial x^i$ — координатные векторы поверхности S_*. Преобразование линейных элементов $\mathbf{r}_\alpha dx_\alpha$ в линейные же элементы $\mathbf{r}_\alpha^* dx^\alpha$ в результате деформации может быть в окрестности некоторой точки представлено в виде вращения и последующей деформации.

Пусть при вращении тройка векторов $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{n}$ преобразуется изометрично в тройку $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{m}$. Определим вращение и деформацию условиями

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad 2\mathbf{m} = c^{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \times \mathbf{p}_\beta, \tag{1.1}$$

$$c^{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta^* = 0, \quad \mathbf{r}_i^* = (a_i^\alpha + \varepsilon_i^\alpha).\mathbf{p}_\alpha. \tag{1.2}$$

Отметим, что по первому условию (1.2) тензор ε_{ij} — первый тензор деформации — симметричен *.

Рассмотрим формальное разложение

$$\nabla_j \mathbf{p}_i = (b_{ij} - \mu_{ij})\,\mathbf{m} - c_i^{\cdot\alpha}\zeta_j \mathbf{p}_\alpha, \tag{1.3}$$

определяющее второй тензор деформации μ_{ij} и вспомогательный вектор ζ_j.

В статье [1] показано, что ε_{ij}, μ_{ij} и ζ_j при неразрывной деформации удовлетворяют уравнениям

$$c^{j\gamma}c^{\alpha\beta}\nabla_\beta \mu_{\gamma\alpha} - c^{\alpha\beta}\zeta_\alpha (b_\beta^{\cdot j} - \mu^{j}_{\cdot\beta}) = 0, \tag{1.4}$$

$$c^{\alpha\beta}c^{\gamma\varrho}(b_{\gamma\alpha}\mu_{\varrho\beta} - \frac{1}{2}\mu_{\gamma\alpha}\mu_{\varrho\beta}) - c^{\alpha\beta}\nabla_\beta \zeta_\alpha = 0, \tag{1.5}$$

$$c^{\alpha\beta}\nabla_\beta \varepsilon_{i\alpha} - c^{\alpha\beta}(a_\alpha^{\cdot\gamma} + \varepsilon_\alpha^{\cdot\gamma})\,c_{\gamma i}\zeta_\beta = 0, \tag{1.6}$$

$$c^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} - c^{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha^{\cdot\gamma}(b_{\gamma\beta} - \mu_{\gamma\beta}) = 0. \tag{1.7}$$

Для того чтобы наметить аналогию между геометрическими и статическими соотношениями нелинейной теории оболочек, введем в рассмотрение величины

$$c^{j\alpha}c^{\beta i}\mu_{\alpha\beta} = \tilde{\mu}^{ij}, \quad c^{\alpha j}c^{\beta i}\varepsilon_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}^{ij}, \quad c^{\beta j}\zeta_\beta = \tilde{\zeta}^{j}. \tag{1.8}$$

Используя (1.8), можем представить уравнения (1.4)—(1.7) в виде

$$\nabla_\alpha \tilde{\mu}^{\alpha j} + \frac{1}{2}c^{j}_{\cdot\beta}\tilde{\mu}^{\alpha\beta}\zeta_\alpha - \tilde{\zeta}^{\alpha}(b^{j}_{\cdot\alpha} - \frac{1}{2}\mu^{j}_{\cdot\alpha}) = 0, \tag{1.9}$$

$$\tilde{\mu}^{\alpha\beta}(b_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}\mu_{\beta\alpha}) + \nabla_\alpha \tilde{\zeta}^{\alpha} = 0, \tag{1.10}$$

$$\nabla_\alpha \tilde{\varepsilon}^{\alpha j} + \frac{1}{2}c^{j}_{\cdot\beta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\zeta_\alpha - \tilde{\zeta}_\alpha(a^{j}_{\cdot\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon^{j}_{\cdot\alpha}) = 0, \tag{1.11}$$

$$c_{\beta\gamma}(a_\alpha^{\cdot\beta} + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha^{\cdot\beta})\,\tilde{\mu}^{\alpha\gamma} + c_\beta^{\cdot\alpha}\tilde{\varepsilon}^{\gamma\beta}(b_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}\mu_{\alpha\gamma}) = 0. \tag{1.12}$$

К этим уравнениям можно присоединить условие симметричности тензора ε_{ij}

$$c_{\alpha\beta}\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta} = 0. \tag{1.13}$$

2. Статические соотношения. Пусть $\mathbf{T}^{(1)}\sqrt{a_{22}}\,dx^2$, $\mathbf{T}^{(2)}\sqrt{a_{11}}\,dx^1$ — главные векторы сил и $\mathbf{M}^{(1)}\sqrt{a_{22}}\,dx^2$, $\mathbf{M}^{(2)}\sqrt{a_{11}}\,dx^1$ — главные моменты сил (относительно точки на поверхности S_*), действующих на координатные поверхности оболочки $x^1 = const$, $x^2 = const$ на протяжении dx^2, dx^1 соответственно, в некоторой точке (x^1, x^2). По данному определению $\mathbf{T}^{(i)}$, $\mathbf{M}^{(i)}$ представляют собой интенсивность усилия и момента на единицу длины линейного элемента S.

Введем обозначения

$$\mathbf{T}^{(i)}\sqrt{a^{ii}} = \mathbf{T}^{i}, \quad \mathbf{M}^{(i)}\sqrt{a^{ii}} = \mathbf{M}^{i} \tag{2.1}$$

и разложим тензоры первого ранга с векторными составляющими $\mathbf{T}^i$, $\mathbf{M}^i$ по векторам $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{m}$

$$\mathbf{T}^{i} = T^{i\alpha}\mathbf{p}_\alpha + N^{i}\mathbf{m}, \quad \mathbf{M}^{i} = c_\beta^{\cdot\alpha}M^{i\beta}\mathbf{p}_\alpha, \tag{2.2}$$

---

* Вертором при преобразовании составляющих тензоров всюду в работе служит основной метрический тензор a_{ij}.

где T^{ij}, M^{ij} — тензоры тангенциальных усилий и моментов, а N^i — вектор поперечных сил.

Обозначим через $\mathbf{X}\sqrt{a}\,dx^1dx^2$ главный вектор и через $\mathbf{M}\sqrt{a}\,dx^1dx^2$ главный момент (относительно точки на S_*) всех внешних сил, действующих на элемент оболочки с площадью срединной поверхности до деформации $\sqrt{a}\,dx^1dx^2$. Пусть имеем разложения

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{p}_\alpha + X\mathbf{m}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^\alpha \mathbf{p}_\alpha. \tag{2.3}$$

Условия равновесия приводят к уравнениям [1]

$$\nabla_\alpha T^{\alpha j} + c^j{}_{\cdot\beta} T^{\alpha\beta}\zeta_\alpha - N^\alpha (b^j{}_\alpha - \mu^j{}_{\cdot\alpha}) = -X^j, \tag{2.4}$$

$$T^{\alpha\beta}(b_{\beta\alpha} - \mu_{\beta\alpha}) + \nabla_\alpha N^\alpha = -X, \tag{2.5}$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha j} + c^j{}_{\cdot\beta} M^{\alpha\beta}\zeta_\alpha - N^\alpha (a^j{}_\alpha + \varepsilon^j{}_\alpha) = c_\alpha{}^{\cdot j} M^\alpha, \tag{2.6}$$

$$c_{\beta\gamma}(a_{\alpha}{}^{\beta} + \varepsilon_{\alpha}{}^{\beta}) T^{\alpha\gamma} + c_{\beta}{}^{\cdot\alpha} M^{\gamma\beta}(b_{\alpha\gamma} - \mu_{\alpha\gamma}) = 0. \tag{2.7}$$

3. Аналогия между геометрическими и статическими соотношениями. Сравнивая однородные ($X^j = X = M^j = 0$) уравнения равновесия (2.4)—(2.7) и геометрические соотношения (1.9)—(1.12) замечаем, что уравнения (2.4)—(2.7) переходят в (1.9)—(1.12), если T^{ij} заменить через $\tilde{\mu}^{ij}$, M^{ij} — через $\tilde{\varepsilon}^{ij}$, N^i — через $\tilde{\zeta}^i$ и нелинейным членам придать множитель $^1/_2$. Условию (1.13) соответствует аналог

$$c_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = 0,$$

который с точки зрения точности физических соотношений теории оболочек вполне приемлем.

Вместе с тем нужно отметить следующее. В линейной теории оболочек аналогия между статическими и геометрическими соотношениями позволяет сделать далеко идущие заключения. В нелинейной же теории указанная аналогия позволяет только, повидимому, или взаимную проверку результатов развертывания уравнений в тензорной записи (1.9)—(1.12) и (2.4)—(2.7), или же позволяет ограничиться только развертыванием уравнений (2.4)—(2.7), так как уравнения (1.9)—(1.12) можно выписать потом без затруднений по аналогии.

Само собой разумеется, что такая аналогия относится именно к рассмотренному варианту основных соотношений нелинейной теории оболочек. Другие варианты могут этим свойством и не обладать.

Институт строительства и строительных материалов
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Алумяэ, Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии, Прикл. мат. мех., т. XIII, вып. 1, 1949.
2. А. Л. Гольденвейзер, Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки, Прикл. мат. мех., т. XI, вып. 6, 1945.
3. А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, М., 1953.
4. В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Судпромгиз, Л., 1951.