

## ПРОБЛЕМА ДВУХ ЧАСТИЦ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

А. Я. КИППЕР,

действительный член Академии наук Эстонской ССР

Релятивистская квантовая теория относится к одному из интереснейших и важнейших разделов современной теоретической физики. Она привела к таким крупным успехам, как предсказание порождения, уничтожения и универсальной превращаемости частиц, физическое понимание вакуума, вычисление сдвига атомных уровней электрона и т. п. Однако релятивистская квантовая теория еще не свободна от некоторых серьезных недостатков. Так, например, имеются трудности, связанные с расходимостью «вакуумных добавок» к собственной энергии, заряду и т. д. Целый ряд попыток преодолеть эти трудности при помощи новой формулировки квантовой теории поля, уточнения понятия вакуума, а также путем различных «регуляризаций» имел пока только частичный успех, хотя полученные результаты несомненно углубили наши знания об элементарных частицах. Об актуальности вопроса свидетельствует и большое число исследований, посвященных разрешению этой проблемы<sup>(1)</sup>.

Теория вакуума опирается на результаты, полученные решением релятивистских уравнений для электрона. Как известно, из этих уравнений вытекает существование «фона» непосредственно не наблюдаемых электронов, заполняющих все отрицательные уровни энергии, и определяются физические свойства вакуума. Электромагнитное поле вызывает деформацию распределения скрытых электронов, производит так называемую поляризацию вакуума. Так, например, деформацию, вызванную покоящимся положительным зарядом, можно вычислить, решая задачу для электронов, движущихся в заданном поле точечного заряда. Получающиеся здесь в результате вычисления отрицательные состояния энергии рассматриваются как заполненные, а распределение этих скрытых электронов представляет собой деформацию вакуума.

Хотя гипотеза скрытых электронов превращает одноэлектронную задачу в задачу многих частиц, она все же имеет корни в одноэлектронной проблеме. Автор настоящего исследования полагает, что разрешение проблемы двух частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, дает возможность получить некоторые дополнения к решению различных вопросов теории вакуума. Но ставя это целью исследования, необходимо сделать сперва некоторые предварительные замечания.

Проблема двух частиц с учетом релятивистских поправок была успешно рассмотрена уже многими исследователями. При этом предполагалось наличие скрытых электронов и учитывались свойства вакуума;

вопрос разбирался по методу Томанга, Феймана, Швингера<sup>(3)</sup>. В настоящем исследовании проблема ставится несколько иным образом. В начале не учитываются ни вакуумные эффекты, ни теория дырок. Рассматривается просто система, состоящая из двух частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля. Это точно такая же постановка вопроса, как и при первоначальной формулировке проблемы движения электрона в заданном электростатическом поле покоящегося точечного заряда. Как и при решении названной проблемы Дирака, в настоящем исследовании выясняется, что некоторые состояния системы из двух частиц должны быть заняты скрытыми частицами. Последние суть вакуумные электроны, распределение которых деформировано точечным зарядом конечной массы. Из сказанного следует, что целью настоящего исследования является попытка дать не теорию системы, состоящей из двух реальных частиц, а теорию, посредством которой можно вычислить вакуумные эффекты, вызванные точечным зарядом, имеющим конечную массу и поэтому принимающим участие в движениях скрытых электронов.

В настоящей статье нет возможности подробно привести отдельные вычисления и выкладки, связанные с решением проблемы. Автор надеется сделать это в другом месте. Здесь же дается только основное, а вычислительно-технические детали приводятся лишь постольку, поскольку это нужно для понимания текста.

В первой части данной работы составляются на основании некоторых предположений волновые уравнения для системы, состоящей из двух противоположно заряженных частиц, подчиняющихся статистике Ферми. Такая система называется в дальнейшем атомом, хотя она не вполне соответствует реальному атому. Далее в первой части работы рассматривается квантовая теория электромагнитного поля и определяется специальное унитарное преобразование, которое придает волновым уравнениям и дополнительным условиям такой вид, при котором «фотонная» часть поля выступает выделенной. Вопросы принципиального характера возникают тогда, когда приходится в формулах переходить от собственных времен частиц атома к времени наблюдателя. Названный переход тесно связан с понятием стационарного состояния атома. В настоящей работе стационарные состояния определяются так, чтобы производные по времени от плотности вероятности нахождения частиц и плотности тока равнялись нулю\*. Выясняется, что выбирая надлежащим образом начальные условия для волнового уравнения, описывающего систему, можно действительно сделать упомянутые производные нулями; этим доказывается существование стационарных состояний в сформулированном выше смысле. Дальше выясняется, что уравнения, относящиеся к стационарному состоянию атома, не содержат членов, в которых обнаруживаются ретардирующие эффекты.

Последнее обстоятельство может вызвать некоторые сомнения, поскольку на первый взгляд кажется, что в разумном релятивистском уравнении двух частиц обязательно должно обнаруживаться запаздывание. Однако члены, которые учитывают ретардирующие эффекты, исчезнут автоматически из уравнения, относящегося к стационарному

\* Это определение стационарного состояния отличается от общепринятого определения. Так, например, Лифшиц и Ландау в своей книге «Квантовая механика» пишут: «Состояния, в которых энергия имеет определенные значения, называются стационарными состояниями системы»<sup>(2)</sup>. В настоящем исследовании мы не можем придерживаться этих определений, поскольку в релятивистской теории двух частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, атом вовсе не имеет определенных состояний энергии. (См. также стр. 88 настоящей статьи.)

состоянию атома. Автору кажется, что по физическому смыслу стационарного состояния это так и должно быть. В стационарном состоянии должно выпадать все, что связано с историей атома, с его поведением в предыдущие моменты. Стабильность частот спектральных линий есть хорошо известный факт, доказывающий справедливость этого утверждения. Но, поскольку запаздывание связывает поведение системы в рассматриваемый момент с его поведением в прошлом, отсутствие ретардирования в формулах, относящихся к стационарному состоянию, можно считать обоснованным.

Вторая часть настоящего исследования посвящена решению основного уравнения, так называемого уравнения энергии, собственные значения которого дают средние значения энергии в стационарном состоянии. Применением метода разделения переменных проблема сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ собственных значений этой системы показывает, что спектр энергии атома имеет в общем случае две непрерывные и одну дискретную части. Отрицательные значения энергии полностью отсутствуют. Этого можно было ожидать, так как при конечной массе атома ее полная энергия также должна быть конечной. Значение нуль входит в спектр энергии. Недопущение наличия скрытых электронов означало бы возможность полной аннигиляции атома. Так как полное превращение атома в фотоны не противоречит общему закону сохранения материи, то и в настоящем случае не возникает затруднений, как и в случае первоначальной проблемы атома водорода, где, вследствие наличия отрицательного спектра, простирающегося до минус бесконечности, атом имеет возможность испускать бесконечно много энергии. Автору настоящего исследования все-таки кажется, что аннигиляция является здесь неправдоподобным процессом.\* Поэтому состояния некоторой части спектра придется предполагать занятыми скрытыми электронами. Это суть электроны вакуума, распределение которых деформировано присутствием точечного заряда с конечной массой. Полученные решения уравнений энергии дают основы для вычисления этой деформации.

1°. Состояние атома и поля описывается волновой функцией  $\Phi$ , которая зависит от пространственно-временных и спиновых координат  $x'_r, x''_r$  и  $\mu', \mu''$  обеих частиц, а также от координат электромагнитного поля  $\mathfrak{X}$ .

$$\Phi = \Phi \left( \begin{matrix} x', x'' \\ \mu', \mu'' \\ \mathfrak{X} \end{matrix} \right). \quad (1.1)$$

Волновая функция является решением системы волновых уравнений\*\*

$$\begin{aligned} \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x'_4} &= \left\{ \beta'_j \cdot \left( \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial x'_j} - \frac{e'}{c} \cdot \mathfrak{A}_j(x') \right) - \frac{e'}{c} \mathfrak{A}_4(x') + \beta'_0 m' c \right\} \Phi, \\ \frac{\hbar''}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x''_4} &= \left\{ \beta''_j \cdot \left( \frac{\hbar''}{i} \frac{\partial}{\partial x''_j} - \frac{e''}{c} \cdot \mathfrak{A}_j(x'') \right) - \frac{e''}{c} \mathfrak{A}_4(x'') + \beta''_0 m'' c \right\} \Phi \end{aligned} \quad (1.2)$$

\* Что атом в первоначальной проблеме Дирака может испускать бесконечную энергию, не является неожиданным и парадоксальным, поскольку из предположения о бесконечной массе ядра следует, что и энергия атома есть бесконечно большая величина. Известная гипотеза Дирака о наличии скрытых электронов, заполняющих отрицательные уровни энергии, по существу не нужна для устранения противоречия с законом энергии (ведь таких противоречий и нет), но она нужна для устранения возможности аннигиляции атома.

\*\* Координаты спина могут иметь только значения 1,2,3,4. Выражение «координата поля» будет уточнено в пункте 2°. Греческие индексы имеют значения 1,2,3,4. По одинаковым индексам производится суммирование. В общем мы придерживаемся обычной ковариантной записи формул.  $\hbar'$  есть постоянная Планка, деленная на 2  $\pi$ .

(суммирование по  $j = 1, 2, 3$ ). Здесь  $\beta'$  и  $\beta''$  обозначают дираковские операторы первой и второй частиц, действующие через спинорные координаты  $\mu'$  и  $\mu''$  на волновую функцию. Способ записи электромагнитных потенциалов  $\mathcal{A}_\mu(x')$  и  $\mathcal{A}_\nu(x'')$  подчеркивает, что эти операторы следует брать в тех пространственно-временных точках, где находятся первая и вторая частицы атома.  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$  и  $m'$ ,  $m''$  обозначают соответственно заряды и массы рассматриваемых частиц. Другие обозначения имеют общепринятый смысл.

В волновые уравнения в форме (1,2) не входят явно члены, учитывающие обменные взаимодействия обеих частиц. Это взаимодействие может в неявном виде содержаться в операторах  $\beta'$ ,  $\beta''$ , а также в операторах потенциала  $\mathcal{A}$ . Однако мы предполагаем, что частицы, образовавшие атомы, являются вполне различимыми. Если обе частицы имеют неравные массы, то различимость будет обеспеченной. Но если  $m' = m''$ , то различимость может осуществляться только по заряду. Как выясняется ниже, обмен зарядов при равных массах частиц является вполне возможным. Поэтому волновые уравнения (1,2) не подходят к случаю атома с частицами равных масс, но противоположных зарядов, в частности к так называемому атому позитрония.

Поскольку  $\beta'$  и  $\beta''$  представляют скорости частиц, то они будут, в силу различимости обеих частиц, переставляемыми. Пусть  $\beta_j$  и  $\beta_0$  являются четырехрядными матрицами, удовлетворяющими требованию

$$\beta_j \beta_k + \beta_k \beta_j = 2\delta_{jk}$$

(при  $j, k = 0, 1, 2, 3$ ).

Пусть далее оператор  $\beta'_j$  действует на волновую функцию  $\Phi$  согласно формуле

$$\beta'_k \cdot \Phi = \beta_k(\mu' \sigma) \cdot \Phi(\sigma \mu''), \quad (1,3)$$

а оператор  $\beta''_k$  согласно формуле

$$\beta''_k \cdot \Phi = \beta_k(\mu'' \sigma) \cdot \Phi(\mu'' \sigma) \quad (1,4)$$

(суммирование по  $\sigma$ ). Нетрудно видеть, что при таком правиле действия операторы  $\beta'$  и  $\beta''$  действительно перестановочны. Однако этими правилами не исчерпываются все возможности таких типов перестановочных операторов. Кажущаяся неопределенность устраняется: можно доказать, что  $\beta'$  и  $\beta''$  суть гиперкомплексные числа из гиперкомплексных чисел с 256-базисными элементами; представление их в виде матриц, действие которых на волновую функцию определяется формулами (1,3) и (1,4), является с точностью до эквивалентных представлений единственным.

2°. Электромагнитное поле, создаваемое зарядами  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$ , описывается операторами потенциала  $\mathcal{A}_\mu(x)$ , удовлетворяющими уравнению

$$\square \mathcal{A}_\mu(x) = 0 \quad (2,1)$$

и поэтому могут быть представленными в виде интегралов

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \int \left\{ A_\mu(k) e^{ikx} + B_\mu(k) e^{-ikx} \right\} \frac{d^3k}{|k|}, \quad (2,2)$$

где  $d^3k = dk_1 dk_2 dk_3$ . Здесь  $A_\mu(k)$ ,  $B_\mu(k)$  являются операторами, зависящими от переменных интегрирования  $k_j$ . При этом

$$kx \equiv k_\sigma x^\sigma,$$

где

$$k_0 = (k_1, k_2, k_3, k_4 = |k| = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}).$$

Присутствие зарядов учитывается так называемым дополнительным условием

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \cdot \Phi = -\{\varepsilon' D(x-x') + \varepsilon'' D(x-x'')\} \Phi, \quad (2,3)$$

где волновая функция  $\Phi$  зависит от пространственно-временных координат  $x'_\nu, x''_\nu$  обоих зарядов, но не зависит от времени поля  $x_4$  и точки поля  $x_j$ . Волновая функция  $\Phi$  та же самая, которая удовлетворяет волновым уравнениям (1,2). Функция  $D$ , входящая в правую часть (2,3) — перестановочная функция Йордана-Паули.

Для операторов потенциала  $\mathfrak{A}_\mu$  имеет место правило перестановок

$$[\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(y)] = \frac{\hbar c}{i} g_{\mu\nu} \cdot D(x-y), \quad (2,4)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — метрический фундаментальный тензор.

Учитывая, что волновая функция  $\Phi$  не зависит от координат и времени точки поля  $x_\mu$ , дополнительные условия (2,3) можно заменить условием для операторов  $A_\mu$  и  $B_\mu$ . Простое вычисление дает:

$$\begin{aligned} k_\mu A^\mu \cdot \Phi &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \left\{ \varepsilon' e^{-ikx'} + \varepsilon'' e^{-ikx''} \right\} \Phi, \\ k_\mu B^\mu \cdot \Phi &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \left\{ \varepsilon' e^{ikx'} + \varepsilon'' e^{ikx''} \right\} \Phi. \end{aligned} \quad (2,5)$$

Таким же способом можно получить из перестановочных соотношений (2,4) перестановочные соотношения для операторов  $A_\mu$  и  $B_\mu$ :

$$\begin{aligned} [A_\mu(k), B_\nu(x)] &= \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} g_{\mu\nu} \cdot |k| \cdot \delta^3(k-x), \\ [A_\mu(k), A_\nu(x)] &= [B_\mu(k), B_\nu(x)] = 0, \end{aligned} \quad (2,6)$$

причем  $\delta^3(k-x) = \delta(k_1-x_1) \delta(k_2-x_2) \delta(k_3-x_3)$ .

От операторов потенциала  $\mathfrak{A}$  требуется, чтобы они были эрмитовыми (собственные значения были бы действительными). Но операторы  $A_\mu$  и  $B_\mu$  в общем не удовлетворяют этому требованию. Однако из  $A$  и  $B$  можно получить операторы

$$\begin{aligned} Q_\mu &= \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{|k|c}} \cdot (A_\mu + B_\mu), \\ P_\mu &= -i \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{|k|c}} \cdot (A_\mu - B_\mu), \end{aligned} \quad (2,7)$$

которые будут эрмитовыми, как это непосредственно и видно, если выразить  $\mathfrak{A}_\mu$  через  $P$  и  $Q$  и учесть, что  $\mathfrak{A}_\mu$  по определению есть эрмитов оператор

$$\mathfrak{A}_\mu(x) = \sqrt{\frac{c}{(2\pi)^3}} \int \left\{ Q_\mu(k) \cdot \cos kx - P_\mu \cdot \sin kx \right\} \frac{d^3k}{|k|^2}.$$

Пусть действительные числа  $\mathfrak{X}_\mu(k)$  будут собственные значения оператора  $Q_\mu(k)$ . Выберем представление, где  $Q_\mu$  есть диагональная



матрица, и возьмем величины  $\tilde{x}_\mu(k)$  в качестве независимых переменных поля. Волновая функция является тогда функцией от  $\tilde{x}_\mu(k)$ . Но поскольку  $\tilde{x}_\mu(k)$  являются в свою очередь функциями переменных  $k_j$ , то правильнее будет утверждение, что  $\Phi$  есть функционал от  $\tilde{x}_\mu(k)$ . Записывается это так:

$$\Phi = \Phi \left( \begin{matrix} x', x'' \\ \tilde{x} \end{matrix} \right).$$

Способ записи подчеркивает, что  $\Phi$  зависит от пространственно-временных и спиновых координат обеих частиц, а также от «переменных поля»  $\tilde{x}_\mu(k)$ .

В представлении, где собственные значения оператора выступают в качестве независимых переменных, имеет место соотношение:

$$P^\mu(k) = \frac{\hbar'}{i} \frac{\delta}{\delta \tilde{x}_\mu}, \quad (2,8)$$

где символ  $\frac{\delta}{\delta \tilde{x}}$  обозначает функциональное производное. Представление (2,8) есть следствие соотношений (2,6) и (2,7).

3°. Для решения задачи о стационарных состояниях атома весьма существенным является разделение поля на кулоновскую и фотонную части, причем это разделение должно быть проведено при соблюдении релятивистской ковариантности. Чтобы достигнуть этой цели, определяются два оператора  $E$  и  $G$ , из которых первый является четырехвектором, а другой — инвариантом. Они используются при особом унитарном преобразовании волновых уравнений, которые после названного преобразования примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_4} &= H_1 \Phi, \\ \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_4} &= H_2 \Phi. \end{aligned} \quad (3,1)$$

Дополнительные условия после указанного преобразования примут вид:

$$\begin{aligned} k_\mu A^\mu \Phi &= 0, \\ k_\mu B^\mu \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (3,2)$$

При этом

$$\begin{aligned} \xi_\mu &= x'_\mu - x''_\mu, \\ \eta_\mu &= x'_\mu + x''_\mu. \end{aligned} \quad (3,3)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \beta'_j \left( \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{e'}{c} \mathfrak{B}_j(\xi/2) + \frac{e'e''}{c} \varphi_j(\xi) - \frac{1}{2} E_j \right) + \right. \\ &+ \beta''_j \left( \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{e''}{c} \mathfrak{B}_j(-\xi/2) + \frac{e'e''}{c} \varphi_j(\xi) - \frac{1}{2} E_j \right) - \\ &\left. - \frac{e'}{c} \mathfrak{B}_4(\xi/2) - \frac{e''}{c} \mathfrak{B}_4(-\xi/2) + 2 \frac{e'e''}{c} \varphi_4(\xi) - E_4 + \beta'_0 m' c + \beta''_0 m'' c \right\}, \end{aligned} \quad (3,4)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \beta'_j \left( \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{e'}{c} \mathfrak{B}_j(\xi/2) + \frac{e'e''}{c} \varphi_j(\xi) - \frac{1}{2} E_j \right) - \right. \\ &- \beta''_j \left( \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \frac{e''}{c} \mathfrak{B}_j(-\xi/2) + \frac{e'e''}{c} \varphi_j(\xi) - \frac{1}{2} E_j \right) - \\ &\left. - \frac{e'}{c} \mathfrak{B}_4(\xi/2) + \frac{e''}{c} \mathfrak{B}_4(-\xi/2) + \beta'_0 m' c - \beta''_0 m'' c \right\}, \end{aligned} \quad (3,5)$$

$$\mathfrak{B}_\mu\left(\frac{x}{2}\right) = \iint \left\{ (A_\mu - k_\mu \mathfrak{R}^\sigma A_\sigma) e^{\frac{i}{2} kx} + (B_\mu - k_\mu \mathfrak{R}^\sigma B_\sigma) e^{-\frac{i}{2} kx} \right\} \frac{d^3k}{|k|}, \quad (3,6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left( \mathfrak{R}_\mu - \frac{1}{2} k_\mu \mathfrak{R}^\sigma \mathfrak{R}_\sigma \right) \cos k\xi \cdot \frac{d^3k}{|k|} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon' \varepsilon''} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left( \mathfrak{R}_\mu - \frac{1}{2} k_\mu \mathfrak{R}^\sigma \mathfrak{R}_\sigma \right) \frac{d^3k}{|k|}. \end{aligned} \quad (3,7)$$

Зависящий от переменных интегрирования  $k_j$  четырехвектор  $\mathfrak{R}_\sigma$  подчиняется требованию

$$\mathfrak{R}_\sigma k^\sigma = 1. \quad (3,8)$$

В новом представлении, которое получилось после вышеназванного унитарного преобразования, оператор

$$E_\mu = 2 \frac{(2\pi)^3}{c} \int k_\mu \cdot A_\sigma B^\sigma \cdot \frac{d^3k}{|k|} \quad (3,9)$$

описывает энергию-импульс фотонной части поля. Оператор  $2 \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu}$  дает энергию-импульс всей системы «атом + поле». Если вычесть из  $2 \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu}$  оператор  $E_\mu$ , то получится энергия-импульс атома:

$$2 \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} - E_\mu. \quad (4,0)$$

Из вышезложенного следует, что мы присоединили к энергии атома, в узком смысле этого слова, еще некоторую часть энергии поля, которая не описывается оператором (3,9) и которую можно назвать кулоновской. Энергия атома состоит из энергии обеих частиц и энергии кулоновской части поля. Энергия же всей системы (атом + поле) состоит из энергии атома и энергии фотонной части поля.

4°. Уравнения (3,1) являются в отношении  $\xi_\mu$  и  $\eta_\mu$  дифференциальными уравнениями, и их решения определяются однозначно заданием начальных условий. В качестве последних можно взять заданное значение волновой функции  $\Phi$  при  $\xi_4 = 0$  и  $\eta_4 = 0$ :

$$(\Phi)_{\xi_4=0, \eta_4=0} = \mathcal{P}. \quad (4,1)$$

При соблюдении дополнительных условий (3,2)  $\Phi$  является произвольной. Возможность выбирать произвольно начальные условия используется в настоящей работе следующим образом. Исходя из волновых уравнений можно получить выражения для плотности вероятности  $W_4$  нахождения частиц атома и плотности тока  $W_j$ , которые удовлетворяют уравнению непрерывности. Кроме того, можно дать формулы для среднего значения энергии-импульса атома, т. е. для среднего значения оператора  $2 \frac{\hbar'}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} - E_\mu$ , которое обозначим через  $P_\mu$ . Начальные условия выбираются так, чтобы

$$\left( \frac{\partial W_4}{\partial \eta_4} \right)_{\xi_4=0, \eta_4=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial W_j}{\partial \eta_4} \right)_{\xi_4=0, \eta_4=0} = 0, \quad (4,2)$$

$$\left( \frac{\partial P_4}{\partial \eta_4} \right)_{\xi_4=0, \eta_4=0} = 0, \quad P_j = 0. \quad (4,3)$$

Поскольку  $\eta_4 = c(t' + t'')$ ,  $\xi_4 = c(t' - t'')$ , то требования (4,2) означают, что в начальный момент  $t' = t'' = 0$  — производные по времени от плотности вероятности, плотности тока и энергии  $P_4$  равняются нулю. Требование  $P_j = 0$  означает, что атом целиком должен находиться в состоянии покоя (иначе нелегко, что  $\frac{\partial W_4}{\partial \eta_4} = 0$ ).

Состояния атома, удовлетворяющие требованиям (4,2) и (4,3), в данной работе называются стационарными состояниями. В отличие от принятого в обыкновенном определении, здесь атом в стационарном состоянии не имеет строго определенной энергии; мы можем говорить только о среднем значении  $P_4$  этой величины. В одноэлектронной задаче, при которой предполагается движение этой частицы в заданном статическом поле, стационарные состояния совпадают с состояниями определенной энергии; кроме того, не только первые производные от плотности вероятности и плотности тока, но и производные всех порядков по времени при стационарных состояниях равняются нулю. В проблеме двух частиц, однако, определенность энергии атома теряется, поскольку атом может порождать или уничтожать фотоны. Вследствие этого нельзя также ожидать, чтобы производные всех порядков по времени от плотности вероятности и плотности тока равнялись нулю.

В теории атома узловыми пунктами считаются состояния определенной энергии (то же, что и стационарные состояния). Под переходом из одного состояния в другое разумеются, вообще говоря, переходы из одного состояния определенного значения энергии в другое. В проблеме же двух частиц мы не можем придерживаться этого представления. Здесь узловыми пунктами для атома являются стационарные состояния в смысле, определенном выше, а не состояния строго определенной энергии (таких здесь вообще нет).

Требования стационарности выполняются в случае, если функционал  $\Phi$ , определяющий начальные условия, выбрать следующим образом:

$$(\Phi)_{\substack{\xi_4=0 \\ \eta_4=0}} = \Phi = e^{-R} \psi \left( \begin{matrix} \xi_j \\ \mu', \mu'' \end{matrix} \right), \quad (4,4)$$

где  $R$  — функционал вида

$$R = \frac{1}{2\hbar'} \int \mathcal{X}_\sigma \mathcal{X}^\sigma d^3k + \frac{1}{c^2} \int (k_\sigma \mathcal{X}^\sigma)^2 d^3k, \quad (4,5)$$

а  $\psi \left( \begin{matrix} \xi_j \\ \mu', \mu'' \end{matrix} \right)$  — функция, зависящая от переменных  $\xi_j$  и спиновых переменных  $\mu'$ ,  $\mu''$  обеих частиц. В (4,5) величина  $\alpha$  — малая константа, которая в окончательных формулах стремится к нулю.

При таком выборе  $\Phi$  дополнительные условия (3,2) окажутся выполненными, но кроме того еще и

$$E_\mu \Phi = 0. \quad (4,6)$$

Последнее означает, что в начальный момент (т. е. момент стационарности) энергия-импульс фотонной части поля имеет вполне определенное значение — нуль\*.

\* Вместо (4,4) можно начальные условия выбрать более общими, в виде  $\Phi = F(\mathfrak{X}) \cdot \psi$ , где  $F(\mathfrak{X})$  — функционал, зависящий только от переменных поля. Специальное выражение для  $F(\mathfrak{X})$  в виде  $e^{-R}$  относится к случаю, когда в начальный момент нет фотонов.



Функция  $\psi$  в (4,4) должна удовлетворять уравнению:

$$P_4 \psi = \left\{ \beta'_j \cdot \left( \frac{h'}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{e' e''}{c} \mathcal{F}_j \right) + \beta''_j \left( -\frac{h'}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{e' e''}{c} \mathcal{F}_j \right) + 2 \frac{e' e''}{c} \mathcal{F}_4 + \beta'_0 m' c + \beta''_0 m'' c \right\} \psi, \quad (4,7)$$

где  $P_4$  — среднее значение энергии в стационарном состоянии.

Функция  $\varphi_\mu$  дается формулой (ср. также (3,7))

$$\varphi_\mu(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left( \mathfrak{R}_\mu - \frac{1}{2} k_\mu \mathfrak{R}^{\sigma\sigma} \mathfrak{R}_\sigma \right) \cos k_j \xi_j \cdot \frac{e^{\sigma k}}{|k|}, \quad (4,8)$$

где  $k_j \xi_j = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3$ .

Уравнение (4,7) называется в данной работе уравнением энергии; собственные значения этого уравнения дают средние значения энергии  $P_4$  атома в его стационарных состояниях.

В уравнении энергии (4,7) нет членов, в которых отражается запаздывание. (В неявном виде запаздывание может учитываться в потенциалах  $\varphi_\mu$ , но во всяком случае, лишившись всех характерных черт запаздывания.) Это произошло оттого, что члены  $\mathfrak{B}_\mu$ , учитывающие в волновых уравнениях (4,1) ретардирующие эффекты, ничего не прибавят к среднему значению энергии атома. Поскольку на первый взгляд кажется, что в релятивистской теории двух частиц обязательно должно обнаруживаться запаздывание, отсутствие последних в уравнении энергии требует разъяснения.

Атом в настоящем исследовании не представляет замкнутой системы в том смысле, что его энергия остается при соответствующих условиях постоянной и имеет определенное значение. Однако атом не должен всегда входить, как некоторая подсистема, в какую-нибудь другую систему. Его незамкнутость, в вышеупомянутом смысле, имеет иной характер, чем незамкнутость подсистемы некоторой большой системы. Дело здесь в том, что атом может порождать и уничтожать фотоны, причем порождение может происходить и тогда, когда энергия фотонной части поля равняется нулю. Следовательно, порождение (и уничтожение) есть внутренний процесс атома, который, конечно, подчиняется внешнему воздействию, но может также происходить спонтанно. Атом с его кулоновской частью поля является в известном смысле самостоятельной системой. Таким самостоятельным системам должны быть свойственны особые состояния, в которых они не отличаются друг от друга (при одинаковом среднем значении энергии), несмотря на различие их поведения в прошлом. Мы считаем, что в этом утверждении кроется один из принципов квантовой механики. Последний можно выразить так: у самостоятельных систем имеются состояния, при которых история этой системы не влияет на дальнейшее ее поведение.

Поскольку запаздывание связывает состояние системы с ее состояниями в прошлом, то в формулы, относящиеся к упомянутым особым состояниям, не должны входить члены, учитывающие ретардирующие эффекты в явном виде. Таким, например, и является уравнение энергии (4,7). Повидимому, стационарные состояния атома такие, при которых погашается история атома\*. Исходя из этого было бы прин-

\* Утверждение, что история системы в предстационарном состоянии не влияет на ее поведение после этого состояния, надо понимать в прямом смысле. Так, например, если атом входит в систему, содержащую другие атомы, то его поведение в некоторой мере зависит от прошлого, но только через взаимодействие с другими атомами. Существовало то, что история системы не влияет через саму эту систему на поведение ее после начала стационарного состояния.

ципиально правильное вообще определить стационарные состояния, как такие состояния системы, при которых история ее стирается и не влияет больше на дальнейшее ее поведение. Что плотность вероятности и плотность тока в конкретных случаях, в коротких промежутках времени стационарного состояния остаются неизменными во всех точках пространства, — это положение приходится рассматривать как теорему, вытекающую из сказанного выше.

5°. В уравнении энергии (4,7) функции  $\varphi_\mu$  являются потенциалами кулоновской части поля и даются формулами (4,8), причем векторы  $\mathfrak{R}_\mu$ , зависящие от переменных интегрирования  $k_j$ , подчиняются требованию

$$\mathfrak{R}_\sigma k^\sigma = 1, \quad (5,1)$$

но в остальном совершенно произвольны. Этот произвол указывает на большое разнообразие возможных вариантов теории. В настоящей работе рассматривается только один, простейший из них. В системе координат, где атом целиком находится в состоянии покоя, для  $\varphi_\mu$  получается:

$$\begin{aligned} \varphi_T(\xi) &= 0, \\ \varphi_4(\xi) &= \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{\varrho}, \\ \text{где } \varrho &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \end{aligned} \quad (5,2)$$

и уравнение энергии (4,7) записывается соответственно в виде

$$P_4 \psi = \left\{ \beta'_j \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} - \beta''_j \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_j} + \frac{e'e''}{4\pi c} \cdot \frac{1}{\varrho} + \beta'_0 m'c + \beta''_0 m''c \right\} \psi. \quad (5,3)$$

Уравнения энергии (5,3) являются обобщением известных уравнений Дирака для атома водорода и переходят в последние, если массу одной частицы, например  $m''$ , взять бесконечно большой.

Приступая к решению (5,3), воспользуемся полярными координатами. Оказывается, что в этом случае можно успешно применить метод разделения переменных и свести задачу к рассмотрению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ собственных значений этой системы уравнений приводит к интересным результатам. Спектр собственных значений разделяется на три части. В интервале

$$+\infty > E \geq m'c^2 + m''c^2$$

спектр непрерывный, в интервале

$$m'c^2 + m''c^2 > E > m''c^2 - m'c^2 \quad (m'' > m')$$

дискретный, а в интервале

$$m''c^2 - m'c^2 \geq E \geq 0$$

опять непрерывный, причем значение  $E = 0$  входит в спектр. Отрицательных собственных значений нет.

Поскольку атом может спонтанно перейти из одного стационарного состояния в другое с уменьшением энергии, то из структуры спектра вытекает, что он может перейти и в состояние со средним значением энергии нуль. Последнее означает аннигиляцию атома. Однако в данной работе полагается, что возможность аннигиляции атома не является реальной. Поэтому, следуя Дираку, придется предположить, что все состояния со средним значением энергии в интервале

$$m''c^2 - m'c^2 \geq E \geq 0$$

заняты скрытыми электронами. Отсутствие какого-либо скрытого электрона интерпретируется известным образом, как «дырка», т. е. позитрон. Можно доказать, что при таком подходе не возникает никаких противоречий в отношении физической стороны проблемы.

Отождествляя частицу массы  $m''$  с протоном, а частицу массы  $m'$  с электроном, получим модель атома водорода. Наша теория даст в этом случае формулы для вычисления частот спектральных линий, в частности и формулы сверхтонкой структуры. Однако сверхтонкое расщепление получится меньше того, которое следует из соответствующих измерений. Этого следовало ожидать. Дело в том, что в изложенной теории не учитывается наличие скрытых электронов, присутствие которых меняет количественную сторону теории. Распределение скрытых электронов вокруг протона (которое можно вычислить посредством волновой функции, являющейся решением уравнения энергии) отличается от распределения вакуумных электронов и вызывает различные эффекты, в частности дополнительный магнитный момент протона\*. Вычисление сверхтонкой структуры придется выполнять поэтому в два приема. Сперва на основании изложенной в настоящем исследовании теории вычисляются вакуумные эффекты, обусловленные протоном, а затем, учитывая последние, производится вычисление сверхтонкой структуры.

Как было отмечено в начале настоящей статьи, целью исследования не является попытка дать теорию реального атома. Вместо этого при помощи изложенных вычислений предполагается дать основы для вычисления вакуумных эффектов, вызванных точечным зарядом с конечной массой (протон). По причине трудностей математически-технического характера в настоящей статье не дается конкретный анализ названных эффектов. Однако автор надеется это сделать в будущем.

В заключение следует отметить, что решение уравнений энергии производилось в простейшем варианте для потенциалов  $\varphi_\mu$  (см. стр. 89). Изучение других вариантов может привести к интересным результатам, рассмотрение которых отнесем к последующим исследованиям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля, Гостехиздат, М.-Л., 1951, стр. 450—462.
2. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика. Гостехиздат, М.-Л., 1948, стр. 42.
3. А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, Гостехиздат, М.-Л., 1952.
4. F Sauter. Ztschr. f. Phys., 63, 803, 1930; 64, 295, 1930.

---

\* У автора отсутствует уверенность в том, что дополнительный магнитный момент протона вышеуказанным образом нашел полное объяснение. Но некоторая часть этого момента должна быть вызвана вакуумными эффектами.