

# POOLRÜHMAD, RINGID JA KATEGOORIID

Valdis Laan (Tartu Ülikool)

*Teaduspreemia loodusteaduste valdkonnas tööde tsükli  
„Poolrühmad, ringid ja kategooriad“ eest*

Teaduspreemia pälvinud artiklite seerias (viited 1–13) olen uurinud erinevaid algebralisi struktuure. Käesolevas artiklis annan lühikese ülevaate sellest, millega tegeleb algebra üldiselt ja milliseid probleeme on käsitletud mainitud seerias. Artikkel on jagatud kolme ossa. Esimeses osas selgitan lihtsustatult, millega tegeleb abstraktne algebra. See peaks olema loetav keskharidusega inimesele. Teises osas lähen natuke täpsemaks, see osa peaks olema arusaadav inimesele, kes on ülikooli tasemel natuke matemaatikat õppinud. Kolmandas osas kirjeldan täpsetes terminites, kuid definitsioone andmata, mida artiklite seerias tehtud on.

## Algebrast väga üldiselt

Algebra võib laias laastus jagada kaheks suureks osaks: lineaaralgebraks ja abstraktseks algebraks. Kuigi rakenduste seisukohalt on lineaaralgebra väga oluline, siis selles artiklis jõuan rääkida ainult abstraktsest algebrast. Kõige lühemalt öeldes on abstraktne algebra selline matemaatika valdkond, mis tegeleb sümbolitega arvutamisega. Arvutamise reeglid ei pruugi selle juures olla täpselt samasugused nagu arvudega arvutamisel. Näiteks  $a + b$  ei pruugi olla sama mis  $b + a$ . Tulemus sõltub sellest, mida me mõtleme  $a$ ,  $b$  ja tehte  $+$  all. Igaks juhuks rõhutan veel kohe alguses, et tegelikult on matemaatikute töö mitte arvutamine, vaid teoreemide tõestamine.

Natuke täpsemalt öeldes uuritakse abstraktses algebras algebralisi struktuure, st tõestatakse teoreeme nende kohta. *Algebraline struktuur* on hulk, mille elementidel on defineeritud üks või mitu tehet, mis peavad rahuldama teatud tingimusi, nii-öelda arvutusreegleid. *Kahekohaline tehe* hulgal  $A$  on eeskiri, mis igale hulga  $A$  elementide järjestatud paarile  $(a, b)$  seab vastavusse mingi elemendi hulgast  $A$ . Kui seda tehet tähistada näiteks märgiga  $*$ , siis paarile  $(a, b)$  vastavusse seatavat elementi tähistatakse  $a * b$ . Näiteks kui  $A$  on kõigi värvide hulk ja  $*$  on värvide segamise tehe, siis

kollane  $*$  sinine = roheline.

Ühel ja samal hulgal võib vaadelda erinevaid tehteid, millel on erinevad omadused. Näiteks võib rääkida tehte kommutatiivsusest ja assotsiatiivsusest. Öeldakse, et kahekohaline tehe  $*$  hulgal  $A$  on *assotsiatiivne*, kui hulga  $A$  kõigi elementide  $a, b$  ja  $c$  korral

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Tehet  $*$  nimetatakse *kommutatiivseks*, kui kõigi  $A$  elementide  $a$  ja  $b$  korral

$$a * b = b * a.$$

Näiteks täisarvude hulgal võime vaadelda liitmis-, korrutamise- ja lahutamistehte. Kui liitmis- ja korrutamistehte on nii assotsiatiivsed kui ka kommutatiivsed, siis lahutamistehtel ei ole kumbagi omadust, sest näiteks

$$(9 - 3) - 5 = 1 \neq 11 = 9 - (3 - 5) \quad \text{ja} \quad 5 - 2 = 3 \neq -3 = 2 - 5.$$

Hulka  $S$  koos kahekohalise assotsiatiivse tehtega  $*$  nimetatakse *poolrühmaks* (ingl *semigroup*). Näiteks täisarvude hulk  $Z$  on poolrühm liitmis- ja korrutamistehte suhtes, aga ei ole poolrühm lahutamistehte suhtes. Neid poolrühmi võib kirja panna paaridena:  $(Z, +)$  ja  $(Z, \cdot)$ .

Kui poolrühmas  $(S, *)$  leidub selline element  $e$ , et iga  $S$  elemendi  $a$  korral  $a * e = a$  ja  $e * a = a$ , siis öeldakse, et  $e$  on selle poolrühma *ühikelement*. Poolrühma, milles leidub ühikelement, nimetatakse *monoidiks*. Näiteks naturaalarvude hulk  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  on monoid korrutamistehte suhtes, kus ühikelemendiks on arv 1. Samas naturaalarvude hulk ei ole monoid liitmistehte suhtes, sest selles hulgas ei leidu sellist elementi  $e$ , et  $1 + e = 1$ .

Kui tehe  $*$  juhtub olema kommutatiivne, siis räägitakse *kommutatiivsest poolrühmast* või *monoidist*. Seega praeguseks oleme tutvunud nelja tüüpi algebraliste struktuuridega: poolrühm, kommutatiivne poolrühm, monoid ja kommutatiivne monoid. Kõiki neid struktuure võib põhimõtteliselt eraldi uurida, aga üldiselt loetakse nende uurimisega seotud tegevus poolrühmateooria alla kuuluvaks.

Üks olulisemaid algebralisi struktuure on rühm. Monoidi  $(S, *, e)$  nimetatakse *rühmaks*, kui  $S$  iga elemendi  $a$  jaoks leidub selline element  $b$ , et  $a * b = e$  ja  $b * a = e$ . *Abeli rühmaks* (norra matemaatiku Niels Henrik Abeli järgi) nimetatakse rühma, mille tehe on kommutatiivne. Näiteks täisarvude hulk on Abeli rühm liitmise suhtes, kus ühikelemendiks on arv 0.

Algebras vaadeldakse ka selliseid struktuure, kus on mitu kahekohalist tehet. *Ringiks* (täpsemalt *ühikelemendiga ringiks*) nimetatakse hulka  $R$  koos kahe kahekohalise tehtega, mida harilikult tähistatakse märkidega  $+$  ja  $\cdot$  ning kutsutakse selle ringi liitmis- ja korrutamistehteks, ning mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

1.  $(R, +)$  on Abeli rühm,
2.  $(R, \cdot)$  on monoid,
3. hulga  $R$  kõigi elementide  $a, b$  ja  $c$  korral

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{ja} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Kahte viimast võrdust kutsutakse *distributiivsuse seadusteks*. Näiteks täisarvude hulk on ring täisarvude liitmise ja korrutamise suhtes. Samamoodi on ratsionaalarvude hulk ja reaalarvude hulk ringid. Aga näiteks naturaalarvude hulk ei ole ring harilikku liitmise ja korrutamise suhtes, sest ta ei ole liitmise suhtes Abeli rühm (ülejäänud kaks omadust siiski kehtivad).

Mainime veel ära ka selle, et lisaks kahekohalistele tehetele, st tehetele, mida saab rakendada kahele kindlas järjekorras vaadeldavale elemendile, kasutatakse algebras ka nullkohalisi, ühekohalisi, kolmekohalisi jne tehteid.

Kui poolrühm  $S$  on lõplik (st temas on lõplik arv elemente), siis on võimalik tema tehe anda niinimetatud *Cayley tabeli* (briti matemaatiku Arthur Cayley järgi) abil, mis on põhimõtteliselt sarnane algklassides õpitava naturaalarvude korrutamistabeliga. Selle tabeli read ja veerud on märgendatud  $S$  elementidega. Elemendile  $a$  vastava rea ja elemendile  $b$  vastava veeru lõikekohta kirjutatakse element  $a * b$ . Näiteks võime vaadelda poolrühmi  $S = \{a, b, c\}$  ja  $T = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ , mille tehete  $*$  ja  $\cdot$  Cayley tabelid on

| *   | $a$ | $b$ | $c$ |
|-----|-----|-----|-----|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $b$ |

ja

| $\cdot$   | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

Esimesest tabelist on näiteks näha, et  $a * c = a$  ja  $b * b = b$ . Samuti on sellest näha, et tehe  $*$  on kommutatiivne. Kes on midagi kuulnud modulaarsest aritmeetikast, tunneb teises tabelis ära mooduli 3 järgi vaadeldavate jäägiklasside korrutamistehte Cayley tabeli. Need kaks tabelit on väga sarnased. Kui esimeses tabelis asendada element  $a$   $\bar{0}$ -ga,  $b$   $\bar{1}$ -ga ja  $c$   $\bar{2}$ -ga, siis saame teise tabeli. Sellises olukorras kasutatakse algebras terminit *isomorfism*. Täpsemalt öeldes on poolrühm  $(S, *)$  isomorfne poolrühmaga  $(T, \cdot)$ .

## Poolrühmade Morita teooriast natuke lähemalt

Järgnevalt kirjeldan natuke detailsemalt ühte osa oma teadustööst, nimelt seda, mis puudutab poolrühmade Morita teooriat. See on olnud viimase 15 aasta

jooksul mu põhiline uurimisvaldkond ja sellel alal olen teinud tihedat koostööd László Márkiga Ungari Teaduste Akadeemia Rényi instituudist ja Ülo Reimaaga Tartu Ülikoolist. Teooria on oma nime saanud jaapani matemaatiku Kiiti Morita järgi, kes 1958. aastal avaldas artikli, milles käsitleti esimest korda ekvivalentsuse probleeme ringide jaoks.

Tuleme tagasi poolrühmade isomorfisuse mõiste juurde. Matemaatiliselt täpne definitsioon on järgmine. Poolrühmi  $(S, *)$  ja  $(T, \cdot)$  nimetatakse *isomorfseteks*, kui leidub bijektiivne kujutus (ehk funktsioon)  $f$  hulgast  $S$  hulka  $T$  nii, et

$$f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$$

hulga  $S$  kõigi elementide  $a$  ja  $b$  korral. Teiste sõnadega: kujutus  $f$  peab säilitama tehete. Eespool kirjeldatud eeskiri  $a \mapsto \overline{0}$ ,  $b \mapsto \overline{1}$ ,  $c \mapsto \overline{2}$  on isomorfism. Isomorfsetel algebralistel struktuuridel on samad algebralised omadused. Poolrühmade isomorfisuse seos on ekvivalentsiseos, sest

- a) iga poolrühm on isomorfne iseendaga (refleksiivsus),
- b) kui poolrühmad  $(S, *)$  ja  $(T, \cdot)$  on isomorfsed, siis ka poolrühmad  $(T, \cdot)$  ja  $(U, \circ)$  on isomorfsed (sümmeetria),
- c) kui poolrühmad  $(S, *)$  ja  $(T, \cdot)$  on isomorfsed ning poolrühmad  $(T, \cdot)$  ja  $(U, \circ)$  on isomorfsed, siis ka poolrühmad  $(S, *)$  ja  $(U, \circ)$  on isomorfsed (transitiivsus).

Algebras püstitatakse uurimisprobleem tihti sellisel kujul: kirjeldada isomorfismi täpsuseni ära kõik algebralised struktuurid, mis on mingite etteantud meid huvitavate omadustega. Seda tüüpi tulemus võib kõlada umbes nii: struktuur  $A$  on omadustega  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  parajasti siis, kui ta on isomorfne hästi tuntud struktuuriga  $T$  või hästi tuntud struktuuriga  $U$ . Üks kuulsamaid sellist tüüpi tulemusi on lõplike lihtsate rühmade kirjeldus (ingl *classification of finite simple groups*). See teoreem ütleb, et rühm on lõplik ja lihtne parajasti siis, kui ta on isomorfne mingi rühmaga neljast hästi tuntud lõpmatust seeriast või siis ühe rühmaga 26-st niinimetatud sporaadilisest rühmast. Selle ühe kõige silmapaistvama algebrateoreemi tõestamiseks kirjutas umbes sada matemaatikut mitusada teadusartiklit, mille kogumaht on kümneid tuhandeid lehekülgi.

Samas kõigi rühmade jaoks sellist kirjeldust anda ei õnnestu, sest rühmi on liiga palju ja liiga erinevaid. Kõigi poolrühmade kirjeldamine isomorfismi täpsuseni on samuti võimatu, sest neid on veelgi rohkem kui rühmi (iga rühm on ka poolrühm, kuid mitte vastupidi). Siit tekib mõte, et äkki saab kõigi poolrühmade kogumil defineerida mingi ekvivalentsiseose nii, et see oleks nõrgem kui isomorfisuse seos, kuid et samasse klassi kuuluvatel poolrühmadel oleks siiski mingid sarnased omadused. Üheks selliseks seoseks ongi Morita ekvivalentsuse seos, mis defineeritakse poolrühmade esituste ehk polügoonide abil.

Olgu  $S$  poolrühm. Parempoolseks  $S$ -polügooniks (ingl *right  $S$ -act*) nimetatakse hulka  $A$  koos eeskirjaga, mis igale paarile  $(a, s)$ , kus  $a$  on  $A$  element ja  $s$  on  $S$  element, seab vastavusse hulga  $A$  mingi elemendi, mida enamasti tähistatakse tähisega  $as$ , ning mistahes  $A$  elemendi  $a$  ja  $S$  elementide  $s, t$  korral kehtib võrdus

$$(as)t = a(st).$$

Sellist eeskirja nimetatakse poolrühma  $S$  *toimeks* (ingl *action*) hulgal  $A$ .

**Näide.** Naturaalarvude hulk  $N$  on poolrühm liitmistehte suhtes. See poolrühm toimib täisarvude hulgal  $Z$  samuti liitmistehte abil, st paarile  $(z, n)$  kus  $z$  on täisarv ja  $n$  on naturaalarv, seatakse vastavusse täisarv  $z + n$ .

**Näide.** Olgu  $m$  ja  $n$  mingid naturaalarvud. Kõigi  $n$ -ndat järku reaalarvuliste elementidega ruutmatriksite hulk  $\mathbf{Mat}_n$  on poolrühm matriksite korrutamise suhtes. See poolrühm toimib  $(m \times n)$ -matriksite hulgal  $\mathbf{Mat}_{m,n}$  samuti matriksite korrutamise abil, st paarile  $(X, Y)$ , kus  $X$  on  $(m \times n)$ -matriks ja  $Y$  on  $(n \times n)$ -matriks, seatakse vastavusse  $m \times n$ -matriks  $XY$ .

Nii nagu mistahes teistegi algebraliste struktuuride korral võib rääkida ka polügoonide vahelistest homomorfismidest. Kui  $A$  ja  $B$  on kaks parempoolset  $S$ -polügooni, siis kujutust  $f: A \rightarrow B$  nimetatakse homomorfismiks polügoonist  $A$  polügooni  $B$ , kui ta säilitab poolrühma  $S$  toimet, mis tähendab seda, et iga  $A$  elemendi  $a$  ja iga  $S$  elemendi  $s$  korral

$$f(as) = f(a)s.$$

Kui  $S$  on fikseeritud poolrühm, siis kõik parempoolsed  $S$ -polügoonid koos nende vaheliste morfismidega moodustavad kategooria. Kategooria täpset definitsiooni selle artikli maht ei võimalda anda. Kategooria tekib tänu sellele, et kui  $f: A \rightarrow B$  ja  $g: B \rightarrow C$  on parempoolsete  $S$ -polügoonide homomorfismid, siis ka kujutuste  $f$  ja  $g$  korrutis  $gf: A \rightarrow C$  on homomorfism, selliste homomorfismide korrutamine on assotsiatiivne ja iga polügooni samasusteisendus on samuti homomorfism.

Morita ekvivalentsuse mõiste defineeritakse kategooriate ekvivalentsuse mõiste abil. Ka seda viimast ei jõua me siin detailselt selgitada. Hästi jämedalt öeldes on kaks kategooriat ekvivalentsed, kui neil on sarnased omadused. Kui nüüd  $S$  ja  $T$  on kaks poolrühma ja kõigi parempoolsete  $S$ -polügoonide kategooria  $\mathbf{Act}_S$  on ekvivalentne kõigi parempoolsete  $T$ -polügoonide kategooriaga  $\mathbf{Act}_T$ , siis tuleb välja, et poolrühmad  $S$  ja  $T$  on isomorfsed. Seega me ei saa poolrühmade jaoks uut huvipakkuvat ekvivalentsuseost. Viimase saamiseks peame vaatama nende kategooriate mingeid alamkategooriaid, mis koosnevad ainult teatud omadustega polügoonidest. Sobivaks selliseks omaduseks on polügooni püsivus. Viimase defineerimiseks on vaja polügoonide tensorkorrutise mõistet.

Mõnevõrra lihtsustatult öeldes on parempoolse  $S$ -polügooni  $A$  ja poolrühma  $(S, *)$  *tensorkorrutis* selline hulk, mis koosneb sümbolitest  $a \otimes s$ , kus  $a$  on  $A$  element ja  $s$  on  $S$  element, kusjuures poolrühma  $S$  iga elemendi  $z$  korral loetakse, et sümbolid  $az \otimes s$  ja  $a \otimes z * s$  on võrdsed. Seda tensorkorrutist tähistatakse

$A \otimes S$ . On olemas loomulik kujutus  $A \otimes S \rightarrow A$  mis viib elemendi  $a \otimes s$  elemendiks  $as$ . Kui see kujutus on bijektiivne, siis öeldakse, et polügoon  $A$  on *püsiv* (ingl *firm*).

Poolrühmi  $S$  ja  $T$  nimetatakse *Morita ekvivalentseteks*, kui kõigi püsivate parempoolsete  $S$ -polügoonide kategooria  $\mathbf{Fact}_S$  on ekvivalentne kõigi püsivate parempoolsete  $T$ -polügoonide kategooriaga  $\mathbf{Fact}_T$ .

Kuna kategooriate ekvivalentsuse seos on ekvivalentsiseos, siis tuleb sellest definitsioonist kohe välja, et ka poolrühmade Morita ekvivalentsuse seos on ekvivalentsiseos. Tuleb välja, et see seos on nõrgem kui isomorfisuseos, st leidub Morita ekvivalentseid poolrühmi, mis ei ole isomorfsed (ühe sellise näite esitame edasises tekstis). Samas on Morita ekvivalentsetel poolrühmadel siiski mingid omadused samasugused.

Üldiselt ei pruugi kahe kategooria ekvivalentsust olla lihtne kontrollida ja samuti on sellest lähtuvalt keeruline tõestada mingeid tulemusi poolrühmade  $S$  ja  $T$  omaduste kohta. Seetõttu on otstarbekas püüda leida mingeid Morita ekvivalentsusega samaväärseid tingimusi, mis ei sisalda kategooria mõistet. Selliseid tingimusi ongi erinevate matemaatikute poolt leitud päris mitmeid. Neist üks olulisemaid on Morita kontekstidega seotud tingimus. Oma Morita teooriat käsitlevates artiklites olengi põhilise tehnilise töövahendina kasutanud just Morita kontekste (need koosnevad kahest bipolügoonist ja kahest bipolügoonide homomorfismist, mis rahuldavad teatud kooskõla tingimusi). Selles artiklis ma bipolügoone ja Morita kontekste siiski käsitlema ei hakka.

Üks teine Morita ekvivalentsusega samaväärne tingimus on seotud poolrühmade laienditega ja sellest räägin veidi lähemalt. Kõigepealt pean defineerima alampoolrühma.

Poolrühma  $(R, *)$  alamhulka  $S$  nimetatakse *alampoolrühmaks*, kui ta on kinnine tehte  $*$  suhtes, st iga  $s, s' \in S$  korral ka korrutis  $s * s'$  kuulub hulka  $S$ .

**Näide.** Naturaalarvude hulk on poolrühm korrutamise suhtes. Kõigi positiivsete kordarvude hulk on selle poolrühma alampoolrühm, sest mistahes kahe kordarvu korrutis on kordarv. Aga algarvude hulk ei ole selle poolrühma alampoolrühm, sest näiteks algarvude korrutis  $3 \cdot 7 = 21$  on kordarv.

Poolrühma  $(R, *)$  nimetatakse oma alampoolrühma  $S$  *laiendiks* (ingl *enlargement*), kui  $R = RSR$  ja  $S = SRS$ , kus

$$RSR = \{r * s * r' \mid r, r' \in R, s \in S\}$$

ja

$$SRS = \{s * r * s' \mid s, s' \in S, r \in R\}.$$

Laiendite ja Morita ekvivalentsuse seostest rääkimiseks on vaja anda veel mõned definitsioonid. Poolrühma  $(S, *)$  elementi  $e$  nimetatakse *idempotendiks*, kui

$e * e = e$  ehk lühidalt  $e^2 = e$ . Idempotentidel on nii poolrühmateoorias kui ka ringiteoorias väga oluline roll, muuhulgas on nad tähtsal kohal Morita teoorias.

**Näide.** Täisarvude multiplikatiivses poolrühmas (st et poolrühma tehteks on täisarvude harilik korrutamine) on kaks idempotenti: arvud 1 ja 0. Naturaalarvude aditiivses poolrühmas (st et poolrühma tehteks on naturaalarvude harilik liitmine) ei ole ühtegi idempotenti.

Öeldakse, et poolrühmas  $(S, *)$  on *lokaalsed ühikelemendid* (ingl *local units*), kui iga elemendi  $s \in S$  jaoks leiduvad sellised idempotendid  $e, f \in S$ , et  $s = e * s$  ja  $s = s * f$ .

Poolrühma nimetatakse *faktoriseeruvaks* (ingl *factorizable*), kui selle poolrühma iga element on esitatav kahe elemendi korrutisena. On selge, et iga monoid on lokaalsete ühikelementidega poolrühm (lokaalseteks ühikelementideks  $e$  ja  $f$  võib võtta monoidi ühikelemendi). Samuti on ilmne, et kui poolrühmas on lokaalsed ühikelemendid, siis see poolrühm on faktoriseeruv. Skemaatiliselt

$$\text{monoid} \Rightarrow \text{lokaalsed ühikelemendid} \Rightarrow \text{faktoriseeruv}.$$

Saab näidata, et need implikatsioonid ei ole pööratavad, mis tähendab, et lokaalsete ühikelementidega poolrühmade klass on suurem kui monoidide klass ja faktoriseeruvate poolrühmade klass on suurem kui lokaalsete ühikelementidega poolrühmade klass.

Oma 2011. aastal ilmunud artiklis „Morita equivalence of semigroups with local units“ tõestas briti matemaatik Mark Lawson muuhulgas järgmise teoreemi.

**Teoreem.** *Lokaalsete ühikelementidega poolrühmad  $S$  ja  $T$  on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui neil leidub ühine laiend.*

Ühise laiendi leidumine tähendab täpsemalt seda, et leidub mingi poolrühm  $R$  (ühine laiend), milles leidub  $S$ -ga isomorfne alapoolrühm  $S'$  ja  $T$ -ga isomorfne alampoolrühm  $T'$  nii, et  $R$  on nende alampoolrühmade  $S'$  ja  $T'$  laiend. Lühemalt öeldes: poolrühmad  $S$  ja  $T$  saab teatud kenal viisil sisestada mingisse poolrühma  $R$ .

See teoreem on väga tähelepanuväärne. Ühise laiendi leidumise tingimus on võrreldes paljude teiste tehniliste tingimustega väga lihtsasti sõnastatav, mõistetav ja enamasti ka kontrollitav. Ta on sõnastatud puhtalt algebralistes terminites ja ei sisalda selliseid mõisteid nagu „kategooria“ või „funktor“.

Ei ole teada, kas seda teoreemi õnnestub üldistada lokaalsete ühikelementidega poolrühmade klassilt faktoriseeruvate poolrühmade klassile. Siiski on suhteliselt lihtne veenduda, et kehtib järgmine lause.

**Lause.** *Olgu poolrühm  $R$  oma alampoolrühma  $S$  laiend, kusjuures  $R$  ja  $S$  on faktoriseeruvad. Siis on  $R$  ja  $S$  Morita ekvivalentsed poolrühmad.*

See lause annab ühe piisava tingimuse Morita ekvivalentsuse kontrollimiseks.

**Näide.** Vaatleme kolmeelemendilist poolrühma  $R = \{a, b, c\}$ , mille tehe  $*$  on antud Cayley tabeliga

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|-----|-----|-----|-----|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $c$ |

Tabelist on näha, et selle poolrühma alamhulk  $S = \{a, b\}$  on alampoolrühm. Lisaks sellele näeme, et nii  $R$  kui  $S$  on faktoriseeruvad. Veendume, et  $R$  on alampoolrühma  $S$  laiend. Selleks tuleb kontrollida võrdusi  $S = SRS$  ja  $R = RSR$ . Kuna  $S$  on faktoriseeruv, siis  $S = SS = SSS \subseteq SRS$ . Veendume, et kehtib ka sisalduvus  $SRS \subseteq S$ . Vaatleme korrutisi  $s * r * s'$ , kus  $s, s' \in S$  ja  $r \in R$ . Kui üks neist kolmest elemendist on  $a$ , siis ka korrutis on  $a$  ja seega kuulub  $S$ -i. Kui ükski neist ei ole  $a$ , siis  $s = s' = b$  ja  $r \in \{b, c\}$ . Ka sellisel juhul  $s * r * s' = b \in S$ . Sellega on tõestatud võrdus  $S = SRS$ .

Teise võrduse puhul on selge, et  $RSR \subseteq RRR \subseteq R$ . Kuna  $a = a * a * a \in RSR$ ,  $b = b * b * b \in RSR$  ja  $c = c * b * c \in RSR$ , siis kehtib ka sisalduvus  $R \subseteq RSR$ . Kokkuvõttes  $R = RSR$ .

Niisiis  $R$  on  $S$  laiend. Tänu eelmisele lausele võib öelda, et need poolrühmad on Morita ekvivalentsed, kuid samas mitteisomorfsed, sest neis on erinev arv elemente.

Kui üks poolrühm on teise laiend, siis tuleb välja, et neil on mitmeid sarnaseid omadusi. Näitena selle kohta toome idempotendi leidumise.

**Lause.** Olgu  $R$  faktoriseeruva poolrühma  $S$  laiend. Siis  $S$  sisaldab idempotenti parajasti siis, kui  $R$  sisaldab idempotenti.

*Tõestus.* Kui  $S$  sisaldab idempotenti  $e$ , siis on see ka poolrühma  $R$  idempotent, sest  $S$  sisaldub  $R$ -s.

Eeldame nüüd, et  $R$  sisaldab mingit idempotenti  $f$  ja tõestame, et ka poolrühmas  $S$  leidub vähemalt üks idempotent. Kuna  $R = RSR = RSSR$  (sest  $S$ -i faktoriseeruvus on samaväärne võrdusega  $S = SS$ ), siis leiduvad  $r, r' \in R$  ja  $s, s' \in S$  nii, et  $f = rss'r'$ . Viimase võrduse paremas pooles oleme poolrühma  $R$  tehte märgi elementide vahelt ära jätnud. See muudab avaldised lühemaks ja on poolrühmateoorias levinud praktika.

Vaatleme elementi

$$e = s'r'f rs \in SRRRS \subseteq SRS = S.$$

See element on idempotent, sest

$$e^2 = (s' r' f r s)(s' r' f r s) = (s' r') f (r s s' r') f (r s) = (s' r') f f f (r s) = s' r' f r s = e,$$

kus eelviimase võrduse juures kasutasime seda, et  $fff = ff = f$ . ■

Kasutades Morita kontekste, saab näidata, et kui kaks faktoriseeruvat poolrühma on Morita ekvivalentsed ja ühes neist leidub idempotent, siis ka teises peab leiduma idempotent. Selliseid omadusi, mis on ühised kõigile poolrühmadele samas Morita ekvivalentsi klassis, nimetakse *Morita invariantideks*. Nii võib näiteks öelda, et idempotendi leidumine on Morita invariant kõigi faktoriseeruvate poolrühmade klassis. Morita invariante oleme muuhulgas uurinud artiklites 13 ja 5. Ringide laiendeid käsitlevad artiklid 7 ja 8.

### Artiklite seeria tulemustest täpsemalt

Selgitame nüüd täpsemalt, mida on tehtud preemia saanud artiklite seerias. Siin ma kasutatavate mõistete definitsioone ei anna, sest see ei mahuks käesoleva artikli raamidesse. Definitsioonid võib leida viidatud artiklitest.

Need 13 aastatel 2021–2024 ilmunud artiklit on valminud koostöös Tartu noorte algebraistidega (Ülo Reimaa, Lauri Tart, Kristo Väljako, Alvin Lepik, Marilyn Kutti, Elery Teor) ja välismaiste kolleegidega, kelleks on Ganna Kudryavtseva (Sloveenia), Leandro Marín (Hispaania), Xia Zhang ja Jianjun Feng (Hiina). Artiklid jagunevad kolme suurema teema vahel.

a) Poolrühmad ja polügoonid. Siia alla kuuluvad artiklid 1, 2, 3, 5, 6, 10. Poolrühmade ja nendega seotud polügoonide omaduste uurimine on olnud mu põhiline uurimisvaldkond juba alates magistrantuurst. Viimasel ajal on mu eriliseks huviobjektiks olnud poolrühmade Morita teooria, millest eespool ka natuke pikemalt juttu oli. Artikkel 10 on esimene artikkel, kus uuritakse lõplikke poolrühmi Morita ekvivalentsuse vaatepunktist. Kõige olulisem tulemus on see, et lõplike poolrühmade Morita ekvivalentsuse probleem on lahenduv, st et leidub algoritm, mis lõpliku arvu sammude abil suudab kindlaks teha, kas kaks etteantud lõplikku poolrühma on Morita ekvivalentsed või mitte. Ülo Reimaa on kirjutanud ka arvutiprogrammi, mis seda algoritmi realiseerib.

Artiklis 5 vaadeldakse esimest korda poolrühmade perfektsust. Varem on uuritud monoidide perfektsust. Selles artiklis on leitud 9 poolrühma parempoolse perfektsusega samaväärset tingimust, mõned neist on sarnased monoidide jaoks teada olnud tingimustega, mõned on täiesti uued. Lisaks näitasime, et nii parempoolne kui ka kahepoolne perfektsus on Morita invariandid faktoriseeruvate poolrühmade klassi jaoks.

Artiklis 3 on tõestatud, et üle lineaarselt järjestatud Abeli rühma vaadeldavate teist järku ruutmaatriksite poolrühmas troopilise korrutamise suhtes on kõigi idempotentide järjestatud hulgal võre (ingl *lattice*) struktuur.

Artiklis 6 on süstemaatiliselt uuritud üle poolrühmade vaadeldavate polügoonide lamedusomadusi. Varem on selliseid omadusi vaadeldud ainult polügoonide korral üle monoidide.

Artiklis 1 on tõestatud, et teatud omadustega osalisi polügoone (ingl *partial act*) üle poolrühmade on võimalik kahel erineval, kuid samas loomulikul viisil globaliseerida. Ühel juhul on kasutatud tensorkorrutise konstruktsiooni, teisel juhul vaadeldakse teatud osaliste kujutuste (ingl *partial mapping*) hulki.

Artiklis 2 on uuritud teatud unaarsete operatsioonidega varustatud poolrühmade (nn Ehresmanni poolrühmade) struktuuri.

b) Ringid ja moodulid. Selle teema alla kuuluvad artiklid 7, 8, 9 ja 13. Neist kolm artiklit (7, 8 ja 13) on seotud ühikelemendita ringide Morita ekvivalentsusega, mis defineeritakse teatud moodulite kategooriate ekvivalentsuse abil.

Artiklis 7 on tõestatud, et kaks idempotentset ringi on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui neil leidub ühine laiend. Poolrühma laiendi mõiste võttis aastal 1996 ilmunud artiklis „Enlargements of regular semigroups“ kasutusele Mark Lawson ja mainitud teoreem on üks vähestest näidetest, kus poolrühmateoreetiline teoreem on tõestatud enne kui tema ringiteoreetiline analoog. Ringi idempotentsus on poolrühma faktoriseeruvusega sarnane mõiste. See tähendab, et ringi iga elementi saab esitada korrutiste lõpliku summana.

Artiklis 13 on tõestatud, et idempotentsete Morita ekvivalentsete ringide unitaarsete ideaalide kvantaalid on isomorfsed. Sellest järeldeb, et kõik idempotentsete ringide omadused, mis on sõnastatavad unitaarsete ideaalide sisalduvusseose ja korrutamise abil, on Morita invariandid.

Artiklis 8 on näidatud, et involutsiooniga ringide vahel leidub teatud omadustega Morita kontekst parajasti siis, kui neil ringidel leidub ühine laiend.

Artiklis 9 on tõestatud, et kahe püsiva (ingl *firm*) ringi vaheliste püsivate homomorfismide hulk on üksühises vastavuses teatud kooskõlaliste funktorite paaride hulgaga teatud moodulite kategooriate vahel. Samuti on tõestatud selle teoreemi analoog poolrühmade jaoks.

c) Järjestatud universaalalgebrate injektiivsus ja täiendid. Selle teema alla kuuluvad artiklid 4, 11 ja 12.

Artiklis 12 on näidatud, et järjestatud universaalalgebrate injektiivsete katete (ingl *injective hull*) konstrueerimisel tuleb unaarsete polünoomfunktsioonide asemel kasutada lineaarseid funktsioone.

Artiklis 4 antakse konstruktsioon, mis lubab moodustada järjestatud universaalalgebra täiendi (ingl *completion*) niinimetatud D-ideaalide abil. See üldistab mitmeid varem vaadeldud konstruktsioone erinevate järjestatud algebrate jaoks.

Artiklis 11 on tõestatud, et järjestatud universaalalgebra injektiivsel kattel on omadused, mis sarnanevad järjestatud hulga Dedekindi-MacNeille'i täiendi omadega.

## Tänu

Lõpetuseks soovin tänada kõiki oma kaasautoreid meeldiva ja viljaka koostöö eest, oma kolleege Tartu Ülikooli matemaatika ja statistika instituudist mõnusa tööhkkonna eest ning algebra emeritprofessoreid Mati Kilpi ja Kalle Kaarlit, kes on mulle pikkade aastate jooksul igati toeks ja eeskujuks olnud ning tänu kellele minust üldse algebraist sai. Soovin ära märkida ka seda, et enamik mainitud seeria artiklitest ning ka käesolev artikkel on valminud Eesti Teadusagentuuri grandid PRG1204 toel.

## VIITED

1. Kudryavtseva, G., Laan, V. 2023. Globalization of partial actions of semigroups. *Semigroup Forum*, 107, 200–217, doi: 10.1007/s00233-023-10364-z
2. Kudryavtseva, G., Laan, V. 2023. Proper Ehresmann semigroups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 66, 758–788, doi: 10.1017/S0013091523000391
3. Kutti, M., Laan, V. 2024. Idempotent  $2 \times 2$  matrices over linearly ordered abelian groups. *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, 2, 1–17, doi: 10.48308/cgasa.2023.232266.1412
4. Laan, V., Feng, J., Zhang, X. 2023. Admissible subsets and completions of ordered algebras. *Algebra Universalis*, 84, 19, doi: 10.1007/s00012-023-00813-9
5. Laan, V., Lepik, A. 2023. Perfection for semigroups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 66, 259–287, doi: 10.1017/S0013091523000159
6. Laan, V., Reimaa, Ü., Tart, L., Teor, E. 2021. Flatness properties of acts over semigroups. *Categories and General Algebraic Structures with Applications* 15, 59–92, doi: 10.52547/cgasa.15.1.59
7. Laan, V., Väljako, K. 2021. Enlargements of rings. *Communications in Algebra*, 49, 1764–1772, doi: 10.1080/00927872.2020.1851702
8. Laan, V., Väljako, K. 2024. Enlargements and Morita contexts for rings with involution. *Glasgow Mathematical Journal*, 1–32, doi: 10.1017/S0017089524000302

9. Marín, L., Laan, V. 2023. Firm homomorphisms of rings and semigroups. *Theory and Applications of Categories*, 39, 625–666.
10. Reimaa, Ü., Laan, V., Tart, L. 2021. Morita equivalence of finite semigroups. *Semigroup Forum*, 102, 842–860, doi: 10.1007/s00233-020-10153-y
11. Zhang, X., Laan, V., Feng, J. 2024. Injective hulls are completions of ordered algebras. *Order*, 41, 539–550, doi: 10.1007/s11083-023-09645-7
12. Zhang, X., Laan, V., Feng, J., Reimaa, Ü. 2021. Correction to: Injective hulls for ordered algebras. *Algebra Universalis*, 82, 65, doi: 10.1007/s00012-021-00749-y
13. Väljako, K., Laan, V. 2021. Morita contexts and unitary ideals of rings. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 70, 122–134, doi: 10.3176/proc.2021.2.02



**Valdis Laan**

Foto: Arno Mikkor

Sündinud 16. mail 1972 Tartus

1990 Põlva Keskkool

1995 Tartu Ülikool, matemaatika (MSc)

1999 Tartu Ülikool, matemaatika (PhD)

Alates 1997. aastast töötanud Tartu Ülikooli õppejõuna, kusjuures alates 2016. aastast algebra professorina. Uurinud põhiliselt poolrühmi ja nende esitusi, aga ka kategooriaid, ringe ja järjestatud algebralisi struktuure. Juhendanud 4 doktoriväitekirja. Aastatel 2015–2018 Eesti Matemaatika Seltsi president. Aastast 2019 teadusajakirja *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* peatoimetaja.